

Med

20
AT
18

Mathematik-
Skript
zum

MedAT 2018

f_x x^2 $\frac{+}{-}$

1. Inhalt

1.	Inhalt	1
2.	Einleitung	3
3.	Mathematik Stichwortliste 2018	3
4.	Basics Mathematik.....	4
4.1.	Addition und Subtraktion	4
4.2.	Multiplikation und Division.....	7
4.3.	Potenzieren und Logarithmieren	11
4.4.	Rechenregeln	13
4.5.	Ist gleich „="	13
4.6.	Runden und Schätzen.....	14
4.7.	Zahlenbereiche	14
5.	Zehnerpotenzen Präfixe	15
6.	Einheiten	15
6.1.	SI-Einheiten.....	15
6.2.	Zeit	16
6.3.	Längen	16
6.4.	Flächen	16
6.5.	Volumina	16
6.6.	Umrechnungen	17
7.	Algebra.....	18
7.1.	Schlussrechnung	18
7.2.	Prozentrechnung	18
7.3.	Bruchrechnen.....	19
7.4.	Gleichungen/Ungleichungen	19
7.5.	Textaufgaben.....	20
8.	Funktionen	22
8.1.	Geradenfunktion.....	22

8.2.	Potenzfunktionen	23
8.3.	e-Funktionen.....	27
8.4.	Logarithmus.....	27
8.5.	Differential.....	28
8.6.	Integral.....	32
8.7.	Flächenberechnung	32
8.8.	Volumenberechnung	33
8.9.	Winkel und Winkelfunktionen	34
9.	Geometrie	36
9.1.	Viereck	36
9.2.	Dreieck	38
9.3.	Kreis.....	39
9.4.	Kugel	39
9.5.	Zylinder	39
9.6.	Kegel	39
9.7.	Würfel.....	40
9.8.	Quader	40
9.9.	Prisma	40
9.10.	Pyramide'	40
10.	Vektorrechnungen.....	41
10.1.	Betrag	41
10.2.	Winkel.....	41
10.3.	Einheitsvektor	41
10.4.	Normalvektor	42
10.5.	Vektoraddition	42
10.6.	Vektorsubstraktion	42
10.7.	Vektormultiplikation	43
11.	Quellen- und Bildverzeichnis	44

2. Einleitung

Es handelt sich hierbei um das dritte MedAT-Skriptum der ÖH Med Wien. Der Großteil in dieser Lernunterlage ist mit Maturaniveau beantwortbar und sollte damit keine großen Schwierigkeiten darstellen. Mit diesem Skriptum sollen die Grundlagen nochmals wiederholt werden, was vor allem für jene wichtig ist, bei denen der Aufnahmetest nicht direkt auf den Schulabschluss folgt. Wir wollen durch dieses Skriptum einen groben Überblick über den gefragten Stoff geben, das Grundwissen auf ein einheitliches Niveau bringen und auch verfestigen.

Von diesem Niveau kann dann, je nach Eigeninitiative, aufgebaut werden.

Ebenso dient dieses Skriptum der Grundlage für Teile der Physik und Chemie (z.B. pH-Wert).

Dein Referat für Studien- und Maturant_innenberatung der ÖH Med Wien

3. Mathematik Stichwortliste 2018

- Zehnerpotenzen
 - Präfixe
 - Rechenbeispiele
- Algebra
 - Schlussrechnung
 - Prozentrechnung
 - Bruchrechnen
 - Gleichungen/Ungleichungen
- Geometrie
 - Winkel
 - Kreis
 - Rechteck
 - Dreieck
 - Prisma
 - Quader
 - Zylinder
 - Kugel
- Einheiten
 - Zeit
 - Länge
 - Flächen
 - Volumina
 - Umrechnungen
- Funktionen
 - Winkelfunktionen
 - e-Funktionen
 - Logarithmus
 - Potenzfunktion
 - Differential

- Integral
- Geradenfunktion
- Vektorrechnung
 - Betrag
 - Winkel
 - Einheitsvektor
 - Normalvektor
 - Vektoraddition/-subtraktion

4. Basics Mathematik

Da beim MedAT keine Taschenrechner erlaubt sind, müssen alle Rechenoperationen im Kopf durchgeführt werden. Das hat wiederum den Vorteil, dass der Schwierigkeitsgrad für Rechnungen sehr beschränkt ist. Es hat sich als ratsam erwiesen, sich mit Grundrechnungsarten nochmals auseinanderzusetzen und Rechnungen per Hand zu wiederholen.

4.1. Addition und Subtraktion

4.1.1. Addieren

Die Addition ist eine der einfachsten Rechnungen in der Mathematik. Es gilt:

$$\text{Summand} + \text{Summand} = \text{Summe}$$

Zahlen dürfen dabei beliebig vertauscht werden.

$$5 + 10 + 9 = 24$$

$$10 + 5 + 9 = 24$$

Das Bilden von großen Summen erfordert einen etwas systematischeren Ansatz. Zuerst werden die Zahlen übereinander geschrieben.

$$\begin{array}{r} 1427 \\ + 3322 \\ \hline \end{array}$$

Nun werden nacheinander beginnend bei der „Einerstelle“ die Zahlen zusammengezählt.

$$\begin{array}{r} 1427 \\ + 3322 \\ \hline 9 \\ \\ 1427 \\ + 3322 \\ \hline 49 \\ \\ 1427 \\ + 3322 \\ \hline 4749 \end{array}$$


Ebenfalls unterkommen kann einem das Summenzeichen.

$$\sum_{i=m}^n x_i$$

i ist der Startwert (Beispielsweise 5 oder m oder eine andere Zahl)

n ist der Endwert (z.B. 10)

$$\sum_{i=5}^{n=10} x_i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

4.1.2. Subtrahieren

Das Subtrahieren („Minus rechnen“) von zwei Werten ist schon um etwas komplizierter und hat schon zu vielen Rechenfehlern geführt. Das Ergebnis einer Subtraktion ist der sogenannte Differenzwert.

$$\text{Minuend} - \text{Subtrahend} = \text{Differenzwert}$$

Vorsicht: Im täglichen Sprachgebrauch versteht man als Differenz eher den „Betrag“. Der Betrag gibt nur den Unterschied zwischen 2 Werten wieder, unabhängig von Minuend und Subtrahend.

Zahlen dürfen ohne Änderung der Rechenart nicht vertauscht werden, denn:

$$5 - 8 \neq 8 - 5$$

Allerdings kann man sich durch Umformen das Leben leichter machen und dadurch die Zahlen vertauschen, um alles zu einer Addition umzuformen (empfeht sich bei großen Gleichungssystemen):

$$5 - 8 = (-3)$$

$$5 + (-8) = (-3)$$

Eine Ursache für etliche Punktabzüge bei Schularbeiten und Tests ist das Minus vor einer Klammer.

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$5 - (3 + 4) = 5 - 3 - 4$$

Die Subtraktion von großen Zahlen verläuft ähnlich wie die Addition, nur dass diesmal nicht getauscht werden darf und der Minuend oben stehen muss!

$$33784 - 8975 = ?$$

$$\begin{array}{r} 33784 \\ - 8975 \\ \hline \end{array}$$

Nun zieht man die untere Zahl von der oberen ab, ist dies nicht möglich so muss man um 10 erweitern. Daher anstelle von 4 - 5 ist es 14 - 5 und 9 die erste Zahl. Dies muss jedoch bei der nächsten Ziffer beachtet werden.

$$\begin{array}{r} 33784 \\ - 8975 \\ \hline 9 \end{array}$$

Die Berücksichtigung erfolgt nun bei der Subtraktion von $8 - (7 + 1) = 0$

$$\begin{array}{r} 33784 \\ - 8975 \\ \hline 09 \end{array}$$

Dies führt man weiter bis zum Endergebnis:

$$\begin{array}{r} 33784 \\ - 8975 \\ \hline 24809 \end{array}$$

Der Umgang mit negativen Zahlen sollte gut sitzen.

Zieht man von einer positiven Zahl eine größere positive Zahl ab, so muss das Ergebnis eine negative Zahl sein.

$$8 - 14 = -6$$

Zieht man von einer negativen Zahl eine positive Zahl ab, so wird das Ergebnis „negativer“.

$$(-8) - 14 = -22$$

Selbiges passiert natürlich, wenn man zwei negative Zahlen addiert (siehe oben die Umwandlung in Additionen).

$$(-8) + (-14) = -22$$

Werden allerdings zwei negative Zahlen voneinander subtrahiert, so wird das Ergebnis positiver.

$$(-8) - (-14) = (-8) + 14 = 6$$

4.2. Multiplikation und Division

4.2.1. Multiplizieren

Die Multiplikation fasst mehrere Additionen zusammen.

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 * 1$$

Es gilt:

$$\text{Faktor} * \text{Faktor} = \text{Produkt}$$

Anwesende Klammern können, wenn nur Multiplikationen vorhanden sind, ignoriert werden.

$$(a * b) * c = a * b * c$$

Ein wichtiger Teil bei der Multiplikation ist das „Herausheben“ und das „Hineinmultiplizieren“, welches doch sehr oft vorkommt.

$$a * c + a * d = (c + d) * a$$

$$5 * 2 + 5 * 3 = (3 + 2) * 5 = 25$$

Für die meisten von uns ist die Multiplikation von Dezimalzahlen schriftlich eine Aufgabe, welche es wieder zu lernen gilt. Sie ist in Papierform schwer zu erklären und man eignet sie sich am besten auf YouTube an. Dennoch hier ein Beispiel!

$$\underline{25,43 * 19,67}$$

Wichtig beim Multiplizieren ist, denselben Abstand bei den Zahlen einzuhalten, sodass alle Zahlen schön untereinander stehen können. Wir beginnen mit der hintersten Zahl und ignorieren die Kommasetzung erstmal. Es gilt, 2543 mal 7. Der Beginn muss exakt unter der 7 sein.

$$\begin{array}{r} 25,43 * 19,67 \\ \hline 17801 \end{array}$$

Zur Erinnerung: 7*3 ist 21, merke 2, [1 hinschreiben]
 7*4 ist 28 plus 2 ist 30, merke 3, [0 hinschreiben]
 5*7 ist 35 plus 3 ist 38, merke 3, [8 hinschreiben]
 2*7 ist 14 plus 3 ist 17 [17 hinschreiben]
 -> 17801

Es wird mit der 6 weitergemacht, diesmal muss der Beginn der Zahl exakt unter der 6 sein!

$$\begin{array}{r} 25,43 * 19,67 \\ \hline 17801 \\ 15258 \end{array}$$

Weiter geht es mit der 9:

$$\begin{array}{r} 25,43 * 19,67 \\ \hline 17801 \\ 15258 \\ 22887 \end{array}$$

Die letzte Zahl ist die 1:

$$\begin{array}{r}
 25,43 * 19,67 \\
 \hline
 17801 \\
 15258 \\
 22887 \\
 2543
 \end{array}$$

Nun werden alle Zahlen, welche wir bis jetzt ausmultipliziert haben, miteinander addiert.

$$\begin{array}{r}
 25,43 * 19,67 \\
 \hline
 17801 \\
 15258 \\
 22887 \\
 2543 \\
 \hline
 5002081
 \end{array}$$

Als letzten Schritt müssen wir das Komma setzen. Dies tun wir, indem wir oben abzählen, wie viele Stellen generell hinter einem Komma stehen. Das sind in unserem Beispiel insgesamt vier. Nun gehen wir in unserem Ergebnis die Stellen von hinten nach vorne durch und setzen das Komma nach der 4ten Stelle:

$$\begin{array}{r}
 25,43 * 19,67 \\
 \hline
 17801 \\
 15258 \\
 22887 \\
 2543 \\
 \hline
 500,2081
 \end{array}$$

Aus der Multiplikation von negativen Zahlen stammt der legendäre Satz „Minus mal Minus ist Plus“ welcher an folgendem Beispiel nachzuempfinden ist:

$$-b * -c = cb$$

$$-3 * -2 = 6$$

(Wenn zwei Zahlen miteinander multipliziert werden, kann es vorkommen, dass das Mal-Zeichen einfach weggelassen wird, daher $3x = 3*x$)

4.2.2. Dividieren

Stellt die Umkehroperation zum Multiplizieren dar und kann als „aufteilen“ verstanden werden, z.B. 12 Äpfel auf 3 Leute aufgeteilt sind 4 Äpfel pro Person.

$$\text{Dividend} : \text{Divisor} = \text{Quotient}$$

Der Dividend wird auch oft als "Zähler" und der Divisor als "Nenner" bezeichnet. Da Bruchrechnen ein eigenes Kapitel im Bereich Algebra ist, wird dieses hier nicht weiter erwähnt.

Eine wichtige Fähigkeit ist das Dividieren mit der Hand, welches wir auch gleich üben werden.

$$145,6 : 13,2 =$$

Wenn der Divisor eine Dezimalzahl ist, so empfiehlt es sich das Komma vorerst zu ignorieren, die Frage lautet „Welchen Teil von 145,6 muss ich nehmen damit sich 132 ausgeht?“ -> Die 145.

$$145,6 : 13,2 =$$

Nun ist die Frage: „Mit was muss 132 multiplizieren werden um der 145 nahe zu kommen?“ Logischerweise mit 1. Es wird anschließend diejenige Zahl exakt unter den Beginn des Dividenten geschrieben.

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 1 \\ \underline{132} \end{array}$$

Es wird nun die 132 von der 145 abgezogen und der Restbetrag darunter geschrieben.

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 1 \\ \underline{132} \\ 13 \end{array}$$

Die nächste Zahl wird „heruntergezogen“.

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 1 \\ \underline{132} \\ 136 \end{array}$$

Dasselbe Spiel beginnt von vorne, nur mit dem Zusatz, dass diesmal die erste Aktion beim Komma der 145,6 gesetzt wird, daher muss nach der nächsten Zahl im Quotienten ein Komma gesetzt werden

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 11, \\ \underline{132} \\ 136 \\ 132 \end{array}$$

Dies wird solange fortgesetzt bis der notwendige Grad an Genauigkeit erreicht wurde, oder kein Rest mehr vorhanden ist.

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 11,03 \\ \underline{132} \\ 136 \\ 132 \\ 400 \\ 396 \\ 4R \end{array}$$

Die Division kann umgewandelt werden in eine Multiplikation, indem man den Kehrwert des Divisors bildet.

$$a : b = a * \frac{1}{b} = a * b^{-1}$$

Auf den letzten Ausdruck mit der Potenz kommen wir bei „Potenzieren und Logarithmieren“ noch einmal zu sprechen.

Wenn im Dividend eine Summe oder eine Differenz enthalten ist, darf nicht gekürzt werden und es darf beim Kürzen auch nicht auf einen Teil bezogen werden! Denn:

$$\frac{a + b}{c} \neq \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \text{ ebenso } \frac{(3 + 6)}{18 + 6} \neq \frac{1 + 1}{18 * 1}$$

Sehr wohl sind das Aufteilen und Kürzen durch Herausheben erlaubt.

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad \text{ebenso} \quad \frac{3 + 6}{18 + 6} = \frac{3 * (1 + 2)}{3 * (6 + 2)} = \frac{1 + 2}{6 + 2}$$

Die Division durch Null ist undefiniert und führt zu keinem Ergebnis. (Genau genommen gäbe es drei Varianten: $-\infty$, $+\infty$ und 0. Da jedoch nicht gesagt werden kann, welche dieser drei im speziellen Fall zutrifft, gilt die Division durch 0 als undefiniert.)

Ergo:

$$\frac{5}{0} = \text{undef.} \quad \text{aber} \quad \frac{0}{5} = 0$$

Man kann also sehr wohl 0 durch eine andere Zahl teilen, das Ergebnis ist natürlich wieder Null, dieses Phänomen jedoch kann man sich beim Formeln-Umwandeln zunutze machen.

Bsp.:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 + 3x + 3 \quad | (: 3) \\ 0 &= x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

4.3. Potenzieren und Logarithmieren

4.3.1. Potenzieren

Additionen können mit Hilfe von Multiplikationen abgekürzt werden. Um Multiplikationen abzukürzen verwendet man Potenzen. Die „Hochzahl“ bezeichnet man als Exponenten und die Zahl, um welche es ursprünglich geht, als Basis.

$$\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Potenz } x * x * x = x^3$$

$$10 * 10 * 10 = 10^3$$

Wenn der Exponent negativ ist, so handelt es sich um den Kehrwert der Potenz mit positivem Vorzeichen.

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Jede Potenz mit dem Exponenten 0 ist 1!

$$2^0 = 1$$

$$x^0 = 1$$

$$10^0 = 1$$

$$p^{(5-\frac{30}{6})} = 1$$

Des Weiteren muss man leider ein paar Rechengesetze betrachten.

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a * b)^r = a^r * b^r$$

$$10^3 * 10^2 = 10^{(3+2)} = 10^5$$

$$\frac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3}$$

$$(5 * 2)^3 = 5^3 * 2^3$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$(a^r)^d = a^{r*d}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$(5^2)^3 = 5^6$$

Die letzte Regel verdient besondere Bedeutung, denn Wurzeln können auch in Form von Potenzen angeschrieben werden.

$$\sqrt{4} = (4)^{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{oder} \quad \sqrt[4]{120} = 120^{1/4} = 120^{0.25}$$

Generell gilt:

$$\sqrt[n]{x^m} = (x)^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt{x^4} = (x)^{\frac{4}{2}} = x^2$$

4.3.2. Logarithmieren

Hierbei wird nach dem Exponenten gefragt. Dafür muss man jedoch die Entscheidung treffen, auf welche Basis man das bezieht.

Wir haben die Zahl 16 und fragen uns, 2 hoch wieviel ist 16?

$$2^? = 16$$

Um dies zu lösen, verwenden wir einen Logarithmus der Basis 2 auf 16:

$$\log_2(16) = 4 \text{ daher } 2^4 = 16$$

Es gibt unendlich viele Logarithmen, da man die Basis frei variieren kann. Zwei finden jedoch eine besonders hohe Bedeutung: der **natürliche Logarithmus** mit der Euler'schen Zahl (2,718) als Basis, sowie der **dekadische Logarithmus** mit der Zahl 10 als Basis. Sehr oft verwendet man „log“ für den dekadischen und „ln“ für den natürlichen Logarithmus.

Ich bin schon öfters von Nachhilfeschülern gefragt worden, wofür man überhaupt in einem normalen Leben das Logarithmieren benötigt -> pH-Wert oder die Richterskala bei Erdbeben. Es ist vernünftig zu wissen, dass eine Veränderung des pH-Wertes um 1 eine Veränderung um den Faktor 10 bedeutet (dek.log). Als Mediziner benötigt man den Logarithmus spätestens beim Berechnen von Biologischen Abbauraten (Exponentielle Abnahmen).

Es gibt wieder einige Rechenregeln zu beachten. Wenn man genau hinsieht, merkt man, dass diese den Regeln des Potenzierens etwas ähneln:

$$\log(u) + \log(v) = \log(u * v) \quad \log(u) - \log(v) = \log\left(\frac{u}{v}\right) \quad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\begin{array}{ccc} \log(10) + \log(100) = \log(1000) & \log(10) - \log(100) = \log\left(\frac{10}{100}\right) & 10^{\log(15)} = 15 \\ 1 + 2 = 3 & 1 - 2 = -1 & \end{array}$$

Es gibt zwei Regeln, welchen ich hier besondere Bedeutung einräumen möchte, denn sie werden irrsinnig oft beim Umwandeln von Exponentialfunktionen angewandt:

$$\log(u^k) = k * \log(u) \quad \text{und} \quad \log_u(u) = 1$$

$$\log(5^3) = 3 * \log(5) \quad \text{und} \quad \log(10) = 1 \text{ sowie } \ln(e) = 1$$

Beispiel: Halbwertszeit-Berechnung, nicht vergessen: $N\left(\frac{t_1}{2}\right) = \frac{1}{2} * N_0$

„Nach der Halbwertszeit ist nur noch die Hälfte von der Ausgangsmenge vorhanden“.

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 * e^{-\lambda * t} \mid N(t) = 0.5 * N_0 \\ 0.5 * N_0 &= N_0 * e^{-\lambda * t} \mid : N_0 \\ 0.5 &= e^{-\lambda * t} \mid : \ln() \\ \ln(0.5) &= \ln(e) * -\lambda * t \mid : (-\lambda) && \text{Beachte } \ln(e) = 1 \\ \frac{\ln(0.5)}{-\lambda} &= t \end{aligned}$$

4.4. Rechenregeln

Punkt vor Strich, die Klammer sagt: „Zuerst komm ich!“.

Die höchste Priorität genießen die Punktrechnungen, das sind Multiplikationen, Divisionen, Potenzen und Wurzeln (da sich die Wurzeln und Potenzen vom Multiplizieren ableiten).

$$\begin{aligned}
 & 23 + 14 : 2 - 2^3 - 2 + 5 \cdot 2 \\
 = & 23 + \underbrace{7} - \underbrace{8} - 2 + \underbrace{10} \\
 = & 30 - 8 - 2 + 10 \\
 = & 22 - 2 + 10 \\
 = & 20 + 10 \\
 = & 30
 \end{aligned}$$

Abbildung 1 Punkt vor Strich¹

4.5. Ist gleich „=“

Das Gleichheitszeichen hat in der Mathematik eine hohe Bedeutung. Es sagt aus, dass die Termini (alias logische mathematische Aussagen) auf beiden Seiten gleich sind, daher dasselbe Ergebnis haben. Man kann sich dies vorstellen wie eine Waage, auf welcher zwei gleich große Gewichte ruhen. Allerdings in unterschiedlicher Form (links Getreide, rechts Fleisch). Wie auch bei einer Waage bleibt die Gleichung ausgeglichen, solange links und rechts genau die gleiche Menge an Gewicht hinzugefügt wird.

Man darf alles, solange man links und rechts exakt dasselbe einrechnet und die Rechenregeln genau befolgt! Sehen wir uns das in einem Beispiel an, wo wir links sofort das Ergebnis hinschreiben werden und rechts alles als Term anschreiben.

$$\begin{aligned}
 5 &= 5 \mid + 2 \\
 7 &= 5 + 2 \mid - 10 \\
 -3 &= 5 + 2 - 10 \mid * 4 \\
 -12 &= 4 * (5 + 2 - 10) \mid : -3 \\
 4 &= \frac{4 * (5 + 2 - 10)}{-3}
 \end{aligned}$$

Beim MedAT werden normalerweise keine großen Formeln zum Umformen oder Auflösen gegeben, jedoch sollten dennoch die Grundzüge gut sitzen.

4.6. Runden und Schätzen

Häufig ist es nicht wichtig, wenn man vier Antwortmöglichkeiten gegeben hat, genau die richtige Zahl auszurechnen. Hierbei empfiehlt es sich nachzusehen, wie genau die Antworten gegeben sind und dann genau so weit zu rechnen.

$$145,6 : 13,2 = 11,03$$

$$146 : 13 \approx 11,23 = 11$$

Nicht vergessen, alle Zahlen ab 5 werden aufgerundet, unter 5 wird abgerundet.

4.7. Zahlenbereiche

Bezeichnung:	Beschreibung:
Natürliche Zahlen	0,1,2,3, ...
Ganze Zahlen	..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
Rationale Zahlen	Ganze Zahlen und Brüche
Reelle Zahlen:	Brüche und irrationale Zahlen (z.B. Wurzel aus 2)
Komplexe Zahlen	Reelle Zahlen und Komplexe Zahlen

Abbildung 2 Zahlenbereiche aufgelistet²

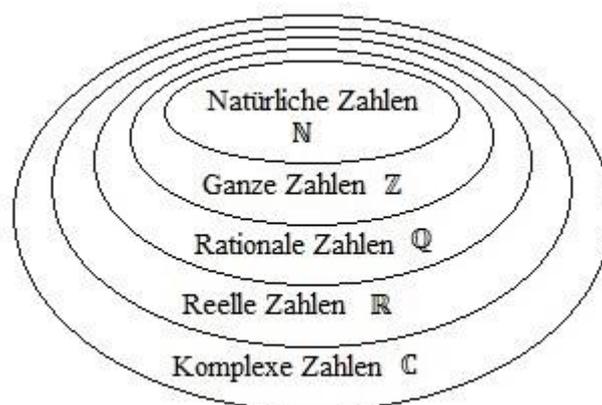


Abbildung 3 Zahlenbereiche als Venn-Diagramm³

Die meisten Operationen finden im Bereich der Reellen Zahlen statt.

5. Zehnerpotenzen Präfixe

Präfix	Kurzzeichen	Potenz	Faktor	
Exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	
Peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000	
Tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000	
Giga	G	10^9	1 000 000 000	
Mega	M	10^6	1 000 000	
Kilo	k	10^3	1 000	
Hekto	h	10^2	100	
Deka	da	10^1	10	
Dezi	d	10^{-1}		0,1
Zenti	c	10^{-2}		0,01
Milli	m	10^{-3}		0,001
Mikro	μ	10^{-6}		0,000 001
Nano	n	10^{-9}		0,000 000 001
Pico	p	10^{-12}		0,000 000 000 001
Femto	f	10^{-15}		0,000 000 000 000 001
Atto	a	10^{-18}		0,000 000 000 00000 0001

Abbildung 4 Bitte ohne Hemmungen auswendig lernen⁴

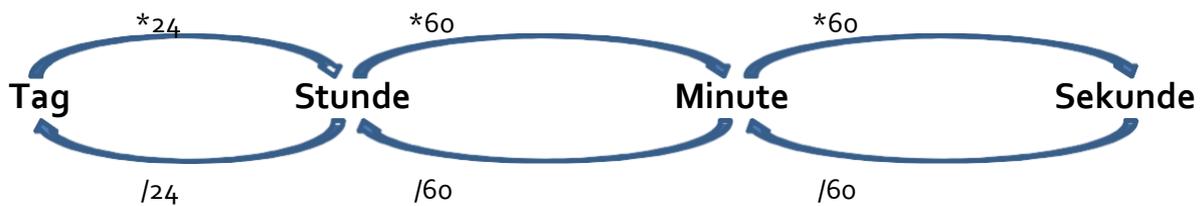
6. Einheiten

6.1.SI-Einheiten

Nr.	Größe	SI-Basiseinheit	
		Name	Zeichen
1.1	Länge	Meter	m
1.2	Masse	Kilogramm	kg
1.3	Zeit	Sekunde	s
1.4	elektrische Stromstärke	Ampere	A
1.5	thermodynamische Temperatur	Kelvin	K
1.6	Stoffmenge	Mol	mol
1.7	Lichtstärke	Candela	cd

Abbildung 5 Auch hier bitte keine Zurückhaltung beim Auswendiglernen⁵

6.2. Zeit



Ab der Sekunde verhält es sich nach SI konstant.

6.3. Längen

Da Längen eindimensional sind, steigen und fallen sie ganz „normal“, ohne dass etwas berücksichtigt werden muss.

6.4. Flächen

Flächen sind zweidimensional, das bedeutet, die Standardeinheit ergibt sich aus $m \cdot m$ oder m^2 . Daher muss bei einem Umwandelungsschritt von dm^2 auf m^2 nicht mit 10 sondern mit 10^2 multipliziert und umgekehrt werden.

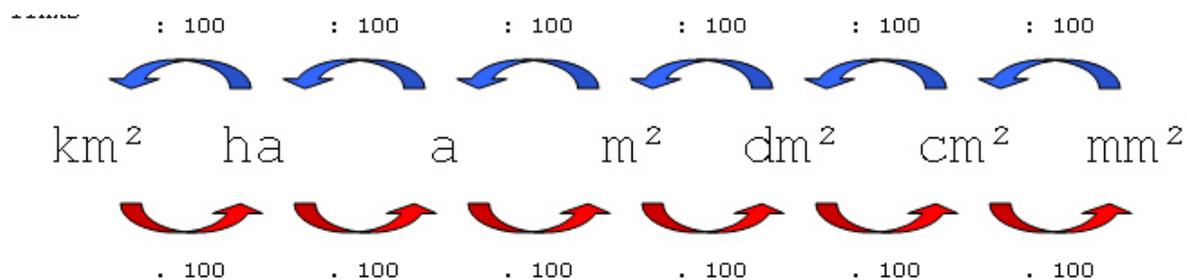


Abbildung 6 Umwandelungsschritte bei Längen⁶

Anmerkung: Die Bezeichnung "Dekameter" konnte sich nicht durchsetzen, stattdessen verwendet man „a“ für „Are“ (vorrangig in der Schweiz). Hektometer ist eine übliche Bezeichnung, bekannt von dem in der Landwirtschaft verwendeten „Hektar“.

6.5. Volumina

Volumina sind dreidimensional, es ergibt sich ihre Einheit aus $m \cdot m \cdot m$ oder m^3 . Um von dm^3 auf m^3 zu kommen, darf nicht mit 10 sondern muss mit $10 \cdot 10 \cdot 10$ oder 10^3 multipliziert werden.

Im üblichen Sprachgebrauch hat sich jedoch statt Kubikmeter (m^3) Liter (L) etabliert. **Merke:** $1dm^3 = 1L$ und $1cm^3 = 1ml$

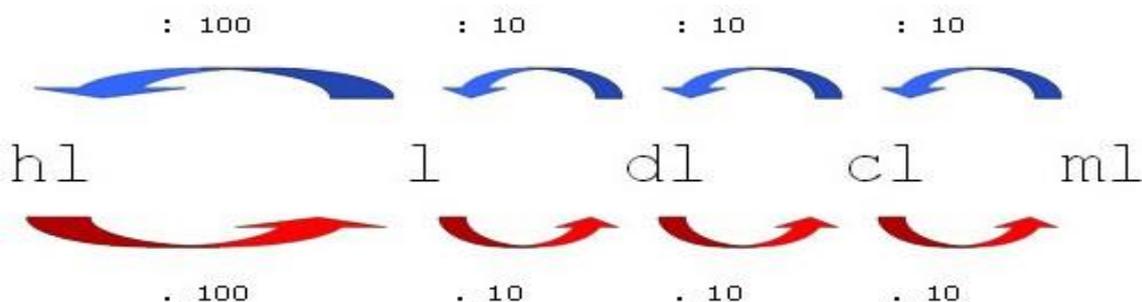


Abbildung 7 Umwandlungen bei Litern⁷

6.6. Umrechnungen

Fast jedes Jahr werden im Mathematik-Teil des MedAT mindestens 1-2 Fragen zum Thema „Einheiten umwandeln“ gestellt.

Wichtig: $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$. Es ist ratsam, immer mit Gleitkomma-Darstellung zu arbeiten. Durch eine Zahl zu dividieren ist dasselbe, wie mit dem Kehrwert zu multiplizieren!

6.6.1. Eindimensionale Einheiten

$$400\mu\text{m} = ? \text{ km}$$

Von **μ (mikro)** auf **k (kilo)** sind es 9 Stellen, die Einheit wird größer, daher muss die Zahl kleiner werden. Es wird daher durch 10^9 dividiert.

$$\frac{4 * 10^2}{10^9} = 4 * 10^{-7} \text{ km}$$

6.6.2. Mehrdimensionale Einheiten

$$2000\text{ml} = ? \text{ hm}^3$$

1 ml = 1cm^3 , von **centi** auf **hekto** sind es 4 Stellen, die Einheit ist dreidimensional und wird größer, daher muss durch 10^{12} dividiert werden.

$$\frac{2 * 10^3}{10^{12}} = 2 * 10^{-9} \text{ hm}$$

6.6.3. Zusammengesetzte Eindimensionale Einheiten

$$1 \frac{\text{mmol}}{\text{s}} = ? \frac{\text{Mol}}{\text{h}}$$

Von **Milli** auf **SI-Standard** sind es 3 Stellen, die Einheit wird größer, daher muss durch 10^3 dividiert werden. Von Sekunden auf Stunden liegt die Zahl 3600 dazwischen, die Einheit wird größer daher muss durch 3600 dividiert werden. Der Bruchstrich dazwischen verschwindet jedoch nicht!

$$1 * \frac{10^{-3}}{3600^{-1}} = 10^{-3} * 3,6 * 10^3 = 3,6 \frac{\text{Mol}}{\text{h}}$$

6.6.4. Zusammengesetzte Mehrdimensionale Einheiten

$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = ? \text{ km/h}^2$$

Von **Meter** auf **Kilometer** sind es 3 Stellen, die Einheit wird größer, daher muss durch 10^3 dividiert werden. Von Sekunden auf Stunden liegt die Zahl 60^2 dazwischen, die Einheit wird größer und ist zweidimensional, es muss daher mit 60^4 dividiert werden. $(60^2)^2$

$$20 * \frac{10^{-3}}{60^{-4}} = 20 * 10^{-3} * 60^4 = 2 * 3600 * 3600 * 10^{-2} = 2 * 3,6 * 3,6 * 10^4 = 25,92 * 10^4 \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

7.3. Bruchrechnen

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \text{Quotient}$$

7.3.1. Multiplikation

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem jeweils Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden.

$$\frac{2}{4} * \frac{3}{2} = \frac{2 * 3}{4 * 2} = \frac{6}{8}$$

7.3.2. Division

Zwei Brüche werden dividiert, indem man mit ihrem Kehrwert multipliziert.

$$\frac{2}{4} : \frac{3}{2} = \frac{2}{4} * \frac{2}{3} = \frac{2 * 2}{4 * 3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

7.3.3. Addition/Subtraktion

Bei einer Addition oder Subtraktion muss der Nenner auf dieselbe Größe gebracht werden, dies kann durch Erweiterung passieren.

$$\frac{3}{5} - \frac{8}{9} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{3 * 9 - 8 * 5}{5 * 9}$$

7.4. Gleichungen/Ungleichungen

Wie Gleichungen funktionieren wurde bereits im Kapitel „Ist gleich“ erörtert. Meistens sucht man nach einer Variablen. Häufig kommt es vor, dass man ein Gleichungssystem vorliegen hat und man die einzelnen Variablen substituieren muss.

Bsp.:

In einem Dreieck gilt: Die Seite a ist ein Viertel der Seite b und die Seite c ist um 8cm kürzer als die Seite b. Der Umfang beträgt 19cm. Wie lang sind die Seiten?

Aus logischer Überlegung heraus ergibt sich die Formel für den Umfang (wenn man alle Seiten zusammenzählt...)

$$a + b + c = U$$

Die Seite a ist ein Viertel der Seite b.

$$\frac{b}{4} = a$$

Die Seite c ist um 8cm kürzer als die Seite b.

$$b - 8 = c$$

Nun alle Informationen zusammenführen:

$$\frac{b}{4} + b + b - 8 = 19 \quad | + 8$$

$$2,25b = 27 \quad | : 2,25$$

$$b = 12$$

$$\frac{b}{4} = a = 3$$

$$b - 8 = c = 4$$

Ungleichungen funktionieren analog, nur muss bei einer Multiplikation mit -1 die Richtung des Zeichens geändert werden!

$$3x + 2 < 15y \quad | * (-1)$$

$$-3x - 2 > -15y$$

7.5. Textaufgaben

Meistens in Form von 1-2 Fragen beim MedAT vorhanden. Hier werden die großen Prinzipien der meisten Textaufgaben vorgestellt. Es lohnt sich jedoch auf jeden Fall, das Kapitel Textaufgaben im Buch der ersten Oberstufe noch einmal durchzuarbeiten.

7.5.1. Geometrische Aufgaben

Wie verändert sich das Volumen einer Kugel, wenn der Radius verdoppelt wird? (Formeln hierfür sind im Kapitel „Geometrie“ zu finden).

$$V = \frac{4}{3} * \pi * r^3$$

Wird der Radius verdoppelt so:

$$V = \frac{4}{3} * \pi * (2r)^3 = \frac{4}{3} * \pi * 8 * r^3$$

Daher steigt das Volumen um den Faktor 8.

7.5.2. Vermischte Aufgaben

In verschiedenen Gruppen von Schülern ist x die Anzahl der Burschen und y die Anzahl der Mädchen. Modellieren Sie eine Gleichung aus folgender Information: „Wäre ein Mädchen weniger, so wären dreimal so viele Burschen wie Mädchen in einer Gruppe.“

„Dreimal so viele Burschen wie Mädchen“

$$3y = x$$

„Wenn ein Mädchen weniger wäre“

$$3(y - 1) = x$$

7.5.3. Bewegungsaufgaben

Vom Bahnhof A fährt um 12.30 Uhr ein Tankzug ab, seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 30km/h. Nachdem er eine Strecke von 3km zurückgelegt hat, durchfährt ein Regionalexpress mit einer mittleren Geschwindigkeit von 90km/h den Bahnhof A in der gleichen Richtung. Wann passiert der Regionalexpress den Bahnhof A?

Die Frage lautet, **wann** passiert der Zug den Bahnhof A? Aus dem Text lässt sich logisch ableiten, dass er dies dann tut, wenn der Tankzug die Strecke von 3km zurückgelegt hat.

Der Tankzug hat eine Geschwindigkeit von 30km/h und legt 3km in welcher Zeit zurück?

$$v = \frac{s}{t}$$

$$30 = \frac{3}{x}$$

$$x = \frac{3}{30} = 0,1h = 6min$$

Daher muss dies um 12.36 passieren. Die Basis für Bewegungsaufgaben ist immer $v = s/t$.

7.5.4. Leistungsaufgaben

Die Leistung ist definiert als $P = W/t$. Die „Arbeit“ als W ist jedoch gerade bei diesen Aufgaben immer ein bisschen anders definiert. Sehen wir uns das anhand eines Beispiels an:

Um einen Löschteich eines Sägewerks leer zu pumpen, kommen 3 Pumpen zum Einsatz. Die erste könnte die Arbeit alleine in 4 Stunden bewältigen, die zweite in 3 Stunden und die dritte in 5 Stunden. Wie lange würden sie zu dritt benötigen? (Wir formen um auf W, was in diesem Fall das Volumen des Löschteichs ist.)

$$P_1 * t + P_2 * t + P_3 * t = V$$

Nun setzen wir die Einzelleistungen ein:

$$\frac{V}{4} * t + \frac{V}{3} * t + \frac{V}{5} * t = V \quad | : V$$

$$\frac{t}{4} + \frac{t}{3} + \frac{t}{5} = 1$$

$$\frac{15t + 20t + 12t}{60} = 1 \quad | * 60$$

$$47t = 60 \quad | : 47$$

$$t = 1,3h \quad (1,2766)$$

Der Gedanke bei Leistungsaufgaben ist, dass im Text meistens Einzelleistungen angegeben sind (z.B. Eine Pumpe schafft alles in 4 Stunden), welche natürlich gemeinsam addiert und dann mit der Zeit multipliziert die eigentliche Arbeit ergeben.

$$(P_1 + P_2 + P_3) * t = W$$

Pumpe	Leistung der Pumpe
1	$\frac{W}{4}$
2	$\frac{W}{3}$
3	$\frac{W}{5}$

Man setzt die Einzelleistungen jeweils ein, dividiert durch die Arbeit und erhält nun eine Gleichung, welche die Zeit liefert.

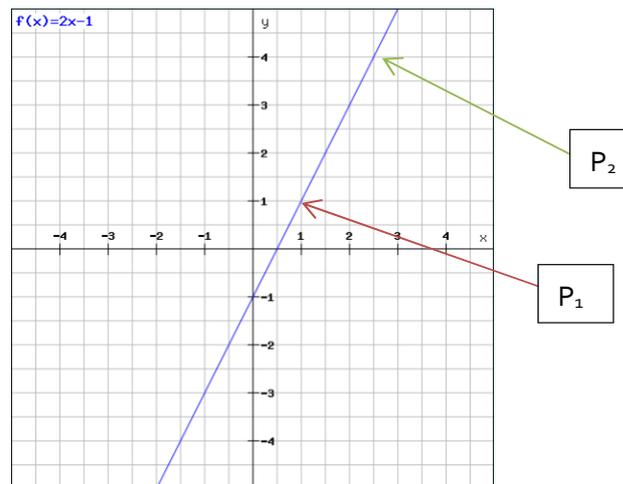
8. Funktionen

Die Funktionen beim MedAT zeichnen sich vor allem dadurch aus, dass sie anhand einer Grafik erkannt werden müssen.

8.1. Geradenfunktion

Eine normale lineare Funktion hat die allgemeine Formel:

$$f(x) = y = k * x + d$$



8.1.1. Bedeutung der Parameter:

Zu allererst sei gesagt, dass Funktionen sogenannte eindeutige Zuordnungen sind. Das heißt, **jedem X-Wert ist ein Y-Wert zugeordnet**. Wie die beiden miteinander zusammenhängen, wird durch die Funktion selbst ausgedrückt.

Achsenabschnitt d:

Drückt den Punkt aus, an welchem der Graph die y-Achse schneidet. An diesem Punkt ist $x=0$ demnach von k unabhängig!

Steigung k :

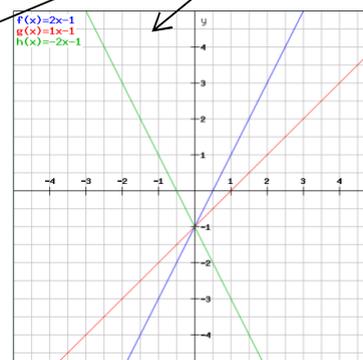
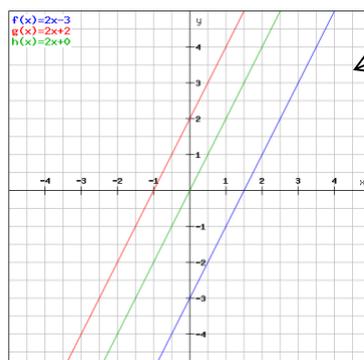
Beschreibt die relative Änderung des y-Wertes bezogen auf die relative Änderung des x-Wertes.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

Beispiel: $P_1(1|1)$, $P_2(2,5|4)$

In die Formel einsetzen: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2,5 - 1} = \frac{3}{1,5} = 2 = k$

k, d und ihre Auswirkungen



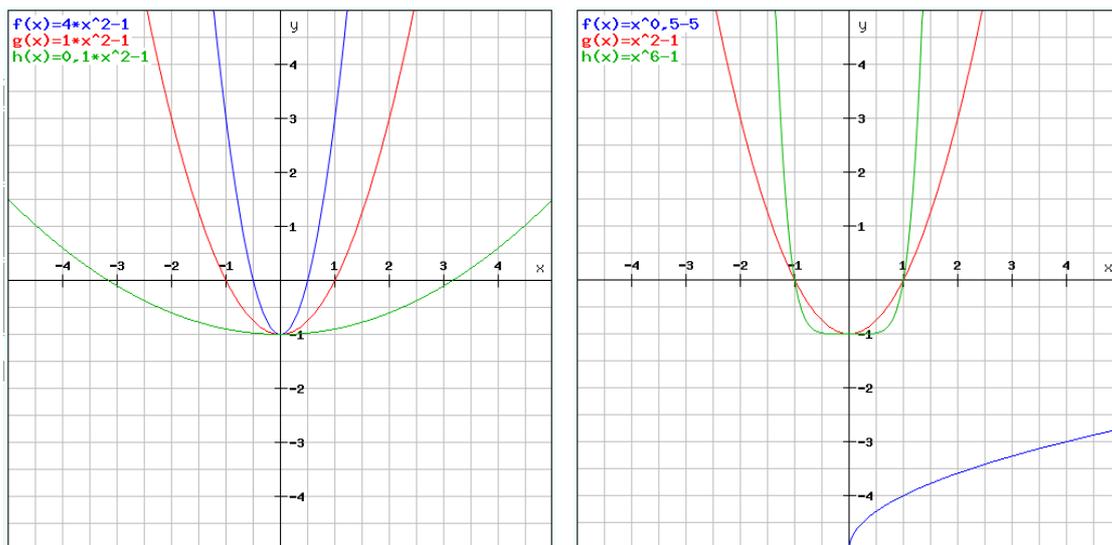
8.2. Potenzfunktionen

Sind Funktionen, welche x als Basis einer Potenz besitzen, der Exponent ist dabei konstant.

8.2.1. Allgemeine Formel

$$f(x) = a \cdot x^r + c$$

a beschreibt diesmal, wie „breit“ der Graph ist. c ist der konstante Wert, welcher über den Schnittpunkt mit der y -Achse entscheidet (so wie bei linearen Funktionen).



Die linke Grafik zeigt, wie sich die Graphen auffächern, wenn a erhöht oder erniedrigt wird.

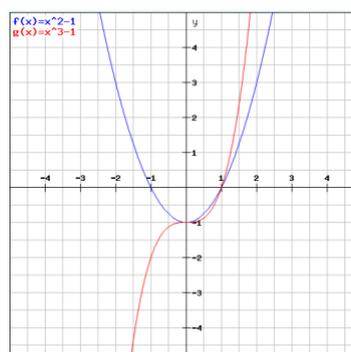
Weitaus interessanter ist die rechte Grafik. Zuerst zur blauen Funktion.

$x^{0.5}$ entspricht einer Wurzelfunktion (siehe Potenzen). Diese sind im negativen Bereich ungültig, weil unter der Wurzel keine negative Zahl stehen darf. Im positiven Bereich kommt es klassisch zu einem runden, verzögerten Anstieg.

Die rote Funktion ist ein bekanntes Beispiel, sie gilt in diesem Fall sozusagen als „Referenzwert“. Die grüne Funktion besitzt einen Exponenten von 6 was zu dem interessanten Effekt führt, da es so scheint, als gäbe es sehr viele Punkte auf der Linie von c . Dies ist leicht erklärbar, wenn man kurz nachdenkt was mit Werten von unter 1 passiert. Beispielsweise am x -Wert von 0,5 ergibt dies einen y -Wert von: $0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 1$ was in etwa -0,984 entspricht und an -1 sehr nahe dran ist. Der starke Anstieg ab einem x -Wert von 1 ist ebenfalls so zu erklären.

Ungerader oder gerader Exponent?

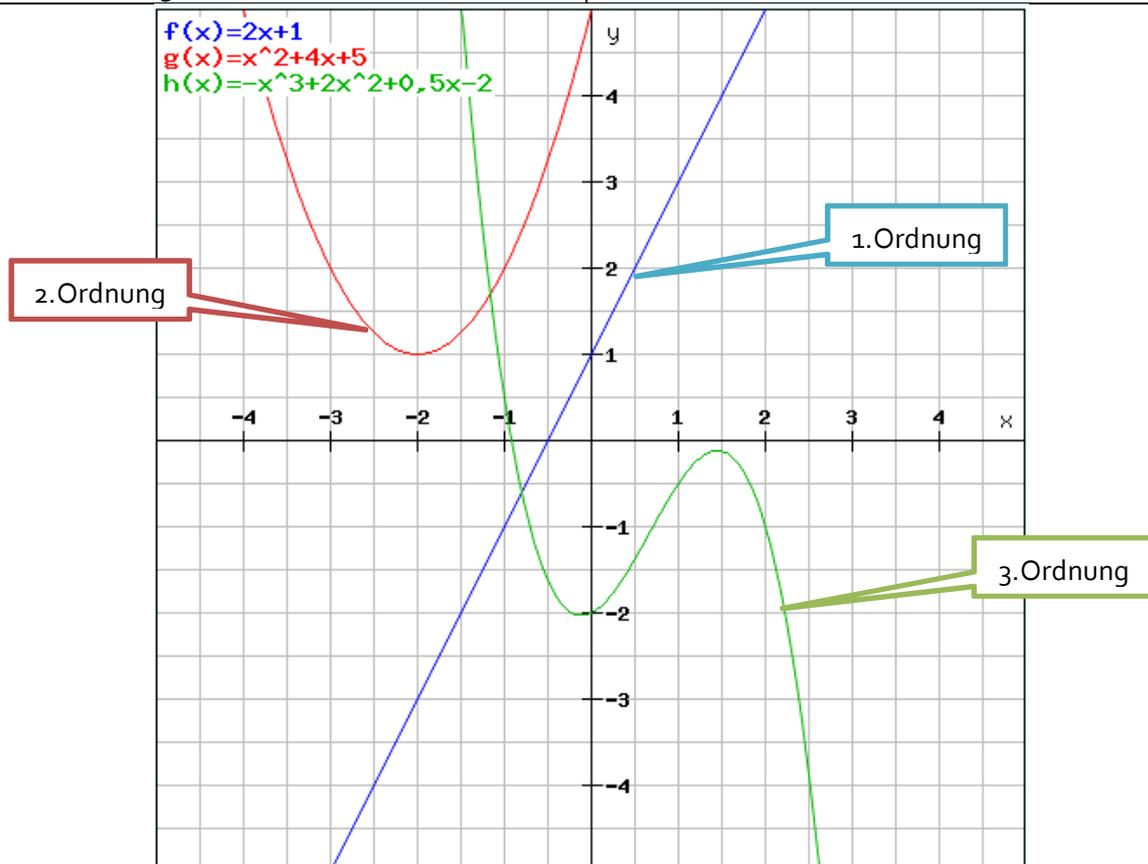
Es macht einen riesen Unterschied im Grafen, partiell im negativen Bereich, ob die Hochzahl gerade oder ungerade ist. Denn: $-1 \cdot -1 = 1$ und $-1 \cdot -1 \cdot -1 = -1$.



8.2.2. Ordnung von Funktionen

Die Ordnung einer Funktion wird quasi durch die Hochzahl festgelegt, so bezeichnet man eine Funktion welche x^2 enthält als Funktion zweiter Ordnung, eine Funktion welche x^3 enthält als Funktion dritter Ordnung und so weiter.

Ordnung	Funktion
Nullte-Ordnung	d
Erste-Ordnung	$kx+d$
Zweite-Ordnung	ax^2+bx+c
Dritte-Ordnung	ax^3+bx^2+cx+d



Es gilt, dass die Höhe der Ordnung über die maximale Anzahl der Nullpunkte (Schnittpunkte mit der x-Achse) entscheidet. Eine Funktion dritter Ordnung hat beispielsweise maximal 3 Nullpunkte.

8.2.3. Quadratische Funktion

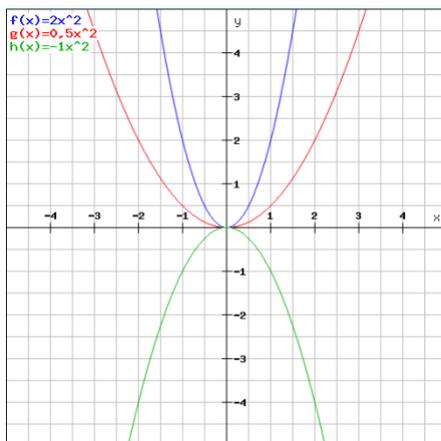
Diese Funktion der zweiten Ordnung zeichnet sich allgemein durch folgende Formel aus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

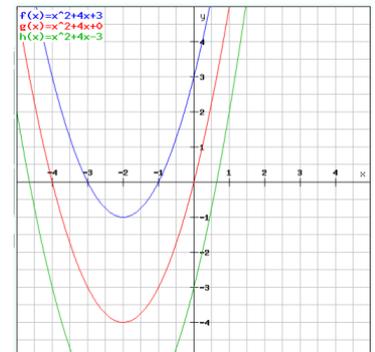
Es sind für jeden y-Wert, 2 x-Lösungen möglich da $(-4)^2 = 16$ und $4^2 = 16$ beide zutreffend sind. Die Spitze/Tiefpunkt der quadratischen Funktion wird meistens als Scheitelpunkt bezeichnet.

Bedeutung der Parameter:

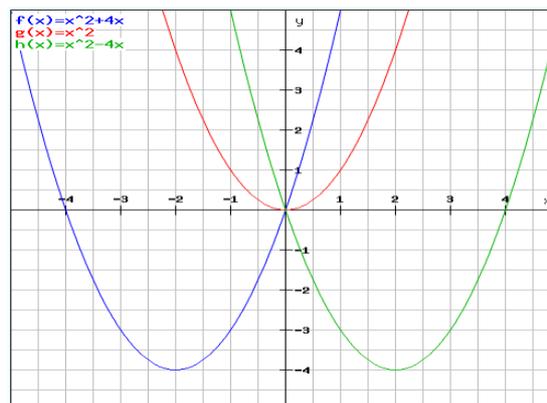
Der statische Wert **c** entscheidet so wie bei den anderen Funktionen bisher auch über den Schnittpunkt mit der y-Achse.



Der Wert **a** entscheidet wie bereits besprochen, wieder über die „Breitfächerung“ der Funktion sowie der Orientierung (ob negativ oder positiv).



Interessant wird hierbei der Faktor **b**, ist er Null so ist die gesamte Funktion achsensymmetrisch und nicht verschoben. Wird **b** negativ, so verschiebt sich die Achse in den positiven Bereich. Wird **b** positiv, so verschiebt sie sich in den negativen Bereich. Ebenso verschiebt sich der Scheitelpunkt. Der Nullpunkt bleibt aber konstant auf **c** definiert.



Lösungsformel für quadratische Funktionen:

$$0 = ax^2 + bx + c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Formel ist manchen auch als „pq-Formel“ bekannt. Für genauere Erklärungen eignen sich Mathematik-Bücher

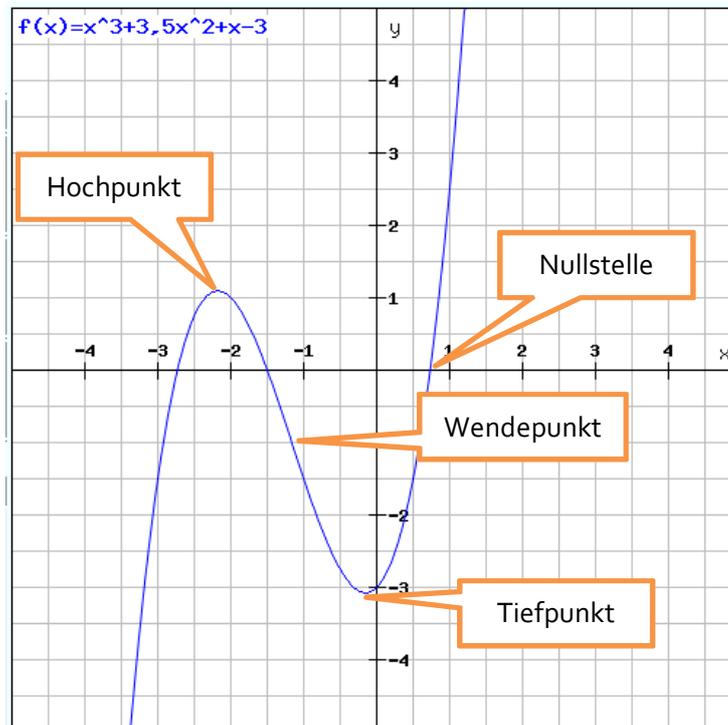
der Oberstufe oder Videos auf Youtube.

8.2.4. Kubische Funktion und deren Punkte

Eine kubische Funktion definiert sich durch:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Die Bedeutung der einzelnen Variablen wird diesmal nicht ausgiebig besprochen, wichtig sind eher die Punkte welche eine Funktion 3. Grades aufweist.

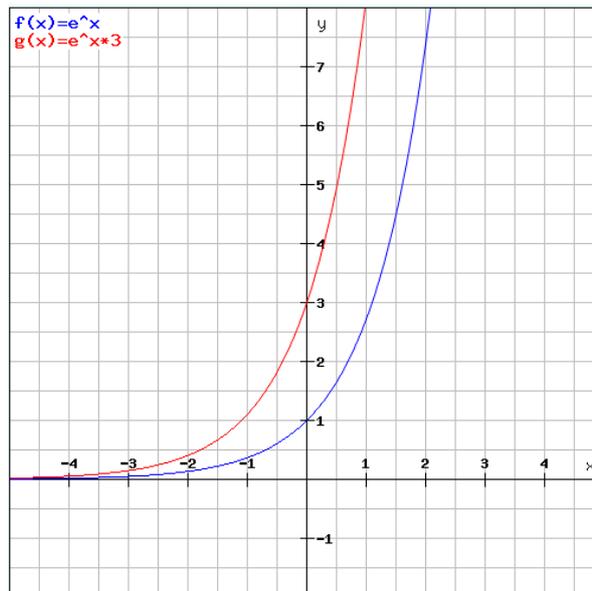


Wie man diese Punkte errechnet wird im Kapitel „Differential“ erklärt. An dieser Stelle sei jedoch gesagt, dass sich am Wendepunkt das Krümmungsverhalten zu ändern beginnt. Zum besseren Verständnis: Fährt man mit dem Rad durch beide Kurven so ist der Wendepunkt der Punkt, an welchem man den Lenker kurz gerade hält.

8.3.e-Funktionen

$$f(x) = a^x * c \quad \text{bzw.} \quad f(x) = e^x * c$$

Die Exponentialfunktionen dienen zur Beschreibung von stark wachsenden oder fallenden Mengen/Populationen (z.B. Bakterien). Prinzipiell gilt, dass die Funktionen auf fast jede Basis bezogen werden könnten (außer dass „a“ nicht kleiner als 1 sein darf). Es hat sich jedoch etabliert, dass auf die Euler'sche Zahl bezogen wird, welche circa 2,7 entspricht.



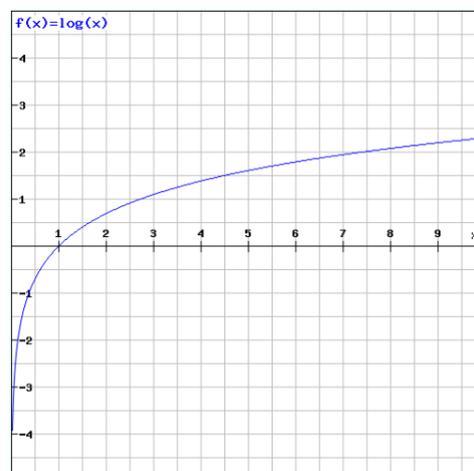
Die Exponentialfunktionen drücken ihr Verhalten hauptsächlich durch den Exponenten aus. Dieser entscheidet, wie schnell die Funktion steigt oder sinkt. Eine weitere Bedeutung hat der statische Wert c , welcher hinzumultipliziert wird und über den Schnittpunkt mit der y -Achse entscheidet (x -Wert = 0).

$$f(x) = e^0 * c = 1 * c$$

8.4. Logarithmus

$$f(x) = \log(x)$$

Die Logarithmusfunktionen ohne weitere Addition haben alle ihre Nullstelle bei 1, weil: $\log(1) = 0$. Vielmehr sei an dieser Stelle nicht zu sagen, da ihnen bisher beim Test auch keine große Bedeutung zukam.



8.5. Differential

Auf die Theorie der Differential und Integralrechnungen wird hier nur wenig eingegangen, da sie auch beim Test noch nicht durch starke Präsenz aufgefallen sind.

8.5.1. Punktsteigung und Ableiten

Den Differentialquotienten kann man sich am besten unter dem Begriff „Punktsteigung“ vorstellen. Er wäre die Steigung, wenn man die Kurve in unendlich viele kleine Punkte zerlegt und zwei Punkte über eine Gerade miteinander verbindet.

Die Funktion, um die Punktsteigung berechnen zu können, erhält man durch Ableiten der Stammfunktion. Nachfolgend sind die wichtigsten Regeln aufgelistet und eher an praktischen Beispielen symbolisiert. (Hier soll wieder daran erinnert werden, dass Differenzieren und Integrieren bis jetzt keine großen Themen beim MedAT waren. Es ist dennoch sinnvoll, zumindest Potenzen ableiten zu können)

8.5.1.1. Potenzregel und Summenregel/Differenzregel

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n * x^{n-1}$$

„Die Hochzahl nach vorne ziehen und um 1 verringern“

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Zu interpretieren ist, dass damit jede Addition als eigene Funktion betrachtet wird und für sich selbst abgeleitet wird. Mit Differenzen wird analog zu Summen verfahren. Sehen wir uns das anhand eines Beispiels an:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 15$$

$$f'(x) = 3 * 2 * x^1 - 4 * 1 * x^0 + 15 * 0 * x^{-1}$$

$$f'(x) = 6x - 4$$

8.5.1.2. Produktregel

$$f(x) = g(x) * h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$$

Werden zwei Funktionen miteinander multipliziert, so werden sie getrennt abgeleitet und abwechselnd mit der Stammfunktion multipliziert. Sehen wir uns das Prinzip an einem Beispiel an, bei welchem wir diese Regel eigentlich nicht bräuchten:

$$f(x) = x^8 * x^{12}$$

Am besten geht man vor, indem man die Funktionen nach der Formel betrachtet. Es wäre hier zwar nicht zwingend notwendig, jedoch ergibt es sich bei komplizierteren Funktionen schnell:

$$g(x) = x^8 \rightarrow g'(x) = 8 * x^7$$

$$h(x) = x^{12} \rightarrow h'(x) = 12 * x^{11}$$

Formel aufschreiben und einsetzen:

$$f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$$

$$f'(x) = 8 * x^7 * x^{12} + x^8 * 12 * x^{11}$$

$$f'(x) = 8 * x^{19} + 12 * x^{19} = 20 * x^{19}$$

8.5.1.3. Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Brüche sind leider schon etwas undankbarer abzuleiten.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3}$$

$$g(x) = x^2 \rightarrow g'(x) = 2x$$

$$h(x) = x^3 \rightarrow h'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x * x^3 - x^2 * 3x^2}{[x^3]^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^4}{x^6} = \frac{-x^4}{x^6} = -x^{-2}$$

8.5.1.4. Kettenregel

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = g'(h(x)) * h'(x)$$

Einmal außen abgeleitet und das wird mit der inneren Ableitung multipliziert.

$$f(x) = (x^2 + 12x)^3$$

$$g(x) = r^3 \quad \rightarrow g'(x) = 3 * r^2$$

$$h(x) = x^2 + 12x \quad \rightarrow h'(x) = 2x + 12$$

$$f'(x) = g'(h(x)) * h'(x)$$

$$f'(x) = 3 * (x^2 + 12x)^2 * (2x + 12)$$

8.5.1.5. Ableitung besonderer Funktionen

Es gibt ein paar Ableitungen, die muss man sich leider auswendig merken.

Funktion	Ableitung
Winkelfunktionen	
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

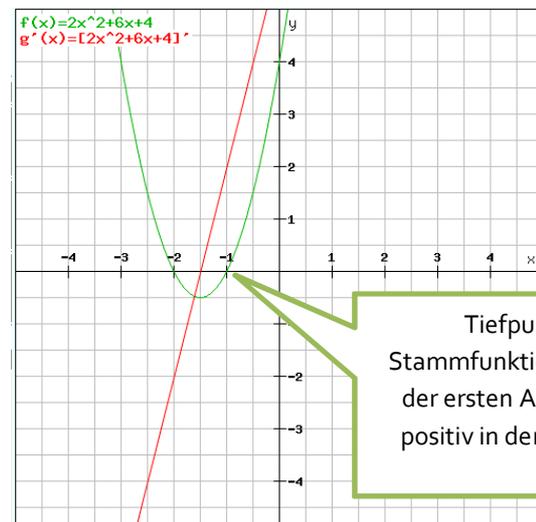
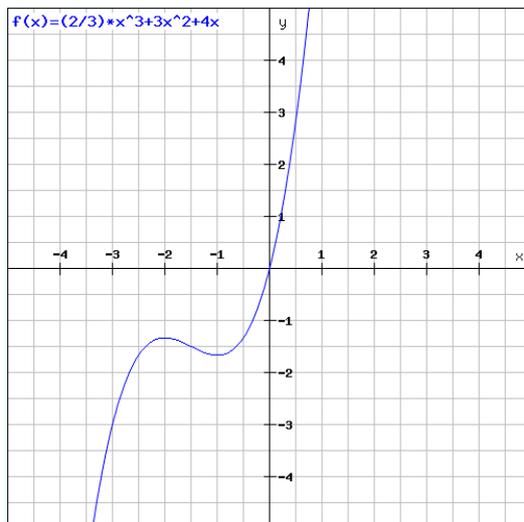
Exponentialfunktionen	
e^x	e^x
e^{kx}	$k e^{kx}$
a^x	$\ln a a^x$

Logarithmusfunktionen	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$a^{\log x}$	$\frac{1}{x \ln a}$

Abbildung 8 Ableitungen von besonderen Funktionen⁸

8.5.2. Bedeutung und Anwendung

Die erste Ableitung gibt die Funktion der Steigung der Stammfunktion wieder. Dies kann zum Errechnen von spezifischen Punkten genutzt werden. Was wir uns an folgendem Beispiel ansehen werden.



8.5.2.1. Extremwerte (Hoch- und Tiefpunkt)

Maximum und Minimum haben besondere Eigenschaften, ihre Punktsteigung ist Null. Denn wer genau am Gipfel steht und einen kleinen Schritt nach vorne geht, verändert seine Höhe nicht. Es gilt $f'(x) = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 - 2}{4} = -2$$

Nun stellt sich die Frage, was davon ist der Hoch- und Tiefpunkt? Dies beantwortet man, indem man in die zweite Ableitung einsetzt, welche die „Steigung der Steigungsfunktion“ wiedergibt und demnach repräsentiert, ob die Funktion nach dem Punkt abnimmt oder zunimmt.

$$f''(x) = 4x + 6$$

$$f''(-1) = 2 \rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(-2) = -2 \rightarrow \text{Hochpunkt}$$

Wenn man am Tiefpunkt ist, kann alles nur noch besser werden, daher eine positive Tendenz. Wenn man am Hochpunkt ist, kann alles nur noch negativer werden. Daher: $f'(x_{HP}) < 0$ und $f'(x_{TF}) > 0$. Einsetzen in die Stammfunktion liefert die y-Koordinaten der Extremwerte.

8.5.2.2. Wendepunkt

Der Wendepunkt ist der Punkt, an welchem die erste Ableitung ihren Extremwert besitzt. Daher ändert sich hier das Krümmungsverhalten. Die erste Ableitung ist die Steigung. An ihrem Hochpunkt/Tiefpunkt ändert sich das Steigungsverhalten. Um an diesen Punkt zu kommen, muss die erste Ableitung nochmals abgeleitet und 0 gesetzt werden: daher die zweite Ableitung der Stammfunktion bilden.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x$$

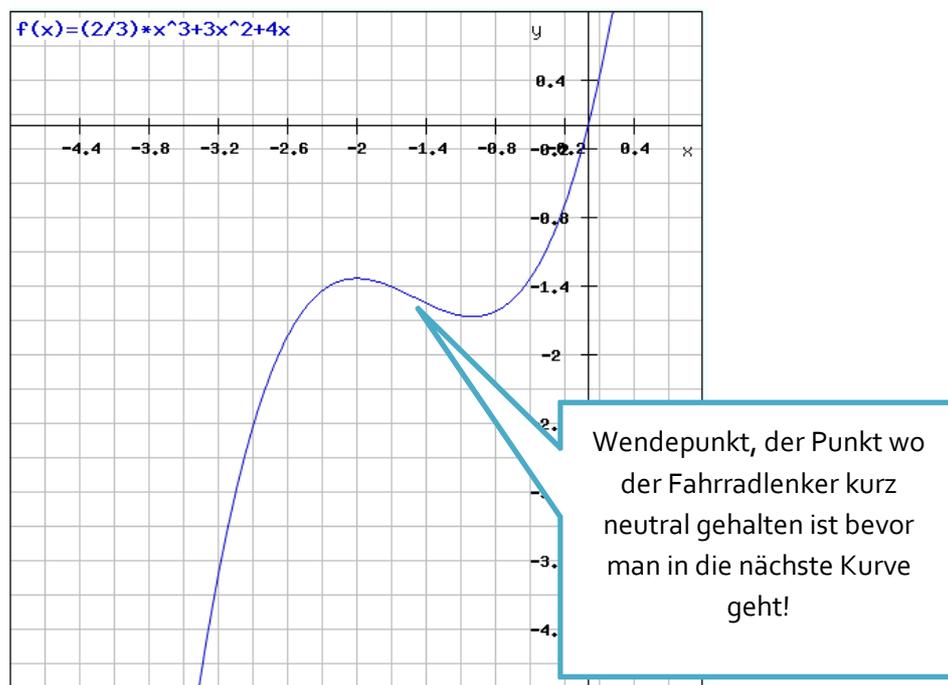
$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$$

$$f''(x) = 4x + 6$$

$$0 = 4x + 6 \quad | -6$$

$$-6 = 4x \quad | :4$$

$$x = -1,5$$



8.6. Integral

Wir definieren hier einen kleinen Ausdruck um. Bis jetzt war „Stammfunktion“ quasi die gegebene Funktion. Ab jetzt ist die Stammfunktion die Funktion über der gegebenen Funktion.

Integrieren ist die Umkehroperation zum Differenzieren, sie findet hauptsächlich Verwendung bei der Flächen- und Volumenberechnung.

Beim Integrieren kommt es im Gegensatz zum Differenzieren unweigerlich zu einem „Informationsgewinn“, welcher durch die Integrationskonstante C wiedergegeben wird.

$$f(x) = 3x + 5$$

$$f'(x) = 3$$

$$\int f'(x) = 3x + c$$

Die Regeln vom Integrieren sind quasi umgekehrt wie jene vom Differenzieren. Es sei angemerkt, dass nach momentanem Kenntnisstand nur das Wissen vom Potenzen-Integrieren von Bedeutung ist. Dies ist möglich durch die einfache Regel: „Die Hochzahl um eins erhöhen und durch die neue Hochzahl dividieren“.

$$f(x) = 3x^2 + 5$$

$$\int f'(x) = \frac{3}{3}x^3 + \frac{5}{1}x^1$$

8.7. Flächenberechnung

Die Fläche unter einer Funktion kann ermittelt werden, indem die Funktion integriert wird und der Endwert der Stammfunktion mit dem Anfangswert der Stammfunktion subtrahiert wird.

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

Die Fläche unter der Funktion x^2 zwischen 1 und 2 soll errechnet werden.

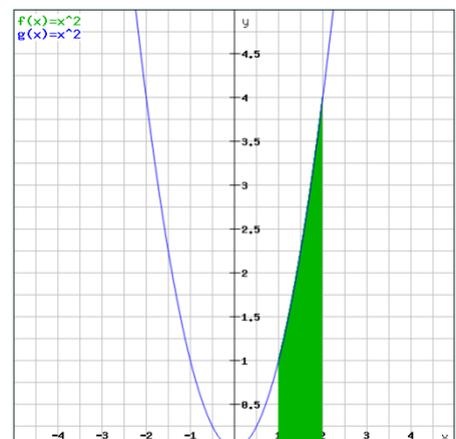
$$\int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^2 x^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2,3\overline{3}E^2$$

E^2 steht für „Einheiten zum Quadrat“ da wir nicht wissen, was die Funktion selbst behandelt.

Um die Einheit einer Funktionsfläche zu ermitteln, multipliziert man am besten die Einheit der X-Achse mit der Einheit der Y-Achse! (Kleiner Tipp für Physik)

Mathematik-Skript MedAT 2017 – ÖH Med Wien



8.8. Volumenberechnung

Die Formel für die Berechnung eines Rotationskörpers leitet sich aus der Fläche eines Kreises und der Integration über eine Länge ab.

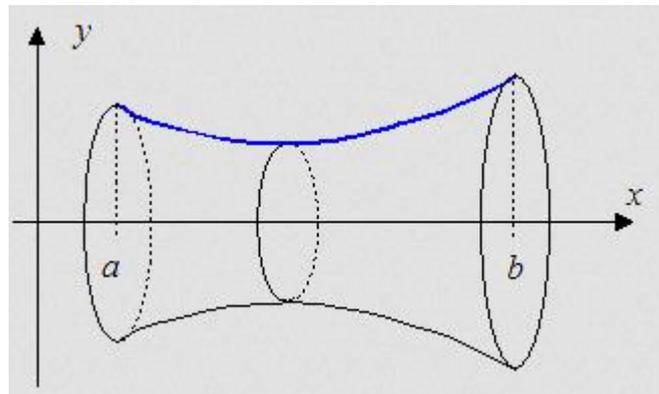


Abbildung 9 Volumen Berechnung von Rotationskörpern⁹

Der Kreis in der Mitte hat den Radius des y-Wertes der blauen Funktion. Dadurch ergibt sich für seine Fläche:

$$A = f(x)^2 * \pi$$

Das Volumen zwischen a und b ergibt sich, wenn man die Fläche nach x integriert, weil x ja der einzige Parameter ist, der sich ändert.

$$V = \int_a^b A = \int_a^b f(x)^2 * \pi$$

Konstanten können bei einer Integration nach vorne gezogen werden und bleiben unberührt, dadurch ergibt sich die allgemeine Formel für Volumen-Integrale:

$$V = \pi * \int_a^b f(x)^2$$

Das Volumen eines Rotationskörpers mit der Funktion x^2 soll zwischen 1 und 2 berechnet werden.

$$\int (x^2)^2 = \frac{x^5}{5}$$

$$V = \pi * \int_1^2 (x^2)^2 = \pi * \left(\frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} \right)$$

$$V = 3 * \frac{31}{5} = \frac{93}{5} \approx 18E^3$$

Wenn ähnliche Beispiele beim Test vorkommen, werden entweder "schönere" Zahlen gewählt oder der Unterschied in den Antworten ist so groß, dass die Antwort geschätzt werden kann.

8.9. Winkel und Winkelfunktionen

Sind leider sehr gerne gefragt beim MedAT.

8.9.1. Winkel¹⁰

Ein Winkel wird von zwei Strahlen eingeschlossen. Es gibt mehrere Einheiten zum Beispiel Grad, Radian oder die Angabe als Bruchteil von π . Wir befassen uns im großen Stil mit Graden, bei welchen ein ganzer Kreis 360° ausmacht und ein Halbkreis dementsprechend 180° . Um in Rad umzurechnen gilt: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Ein Winkel gilt dann als rechter Winkel, wenn er genau 90° hat, ist er kleiner als 90° bezeichnet man ihn als spitzen Winkel und sonst als stumpfen Winkel.

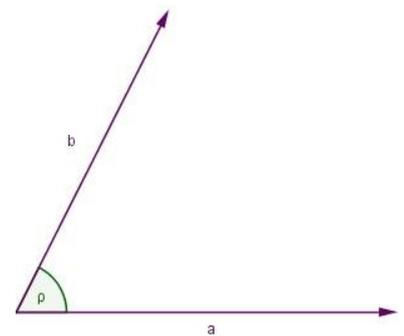


Abbildung 10 Winkel

8.9.2. Der Einheitskreis und die Winkelfunktionen¹¹

Ich persönlich habe mich mit Winkel und Winkelfunktionen immer schwer getan. Erst die Konfrontation mit dem Einheitskreis hat mir das Verständnis erleichtert.

Der Einheitskreis hat einen Radius von genau 1cm, die 4 Quadranten

sind abzugrenzen als 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$, 180° bzw. π , 270° bzw. $\frac{3}{2}\pi$, 360° bzw. 2π .

8.9.2.1. Cosinus

ist definiert als:

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Im Einheitskreis ist die Hypotenuse genau 1, weswegen der Cosinus des Winkels genau dem x-Wert des Punktes P entspricht.

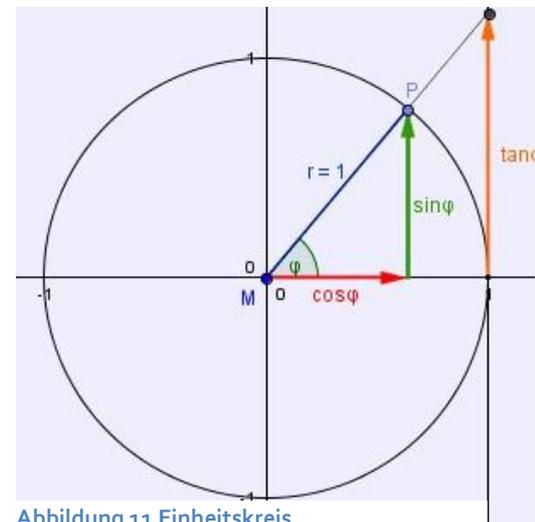


Abbildung 11 Einheitskreis

Sehen wir uns sein Verhalten genauer an:

Winkel	360° bzw. 2π .	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$	180° bzw. π	270° bzw. $\frac{3}{2}\pi$
Wert	1	0	-1	0

Es gibt natürlich noch den Fall des Winkels von 45° bzw. $\frac{\pi}{4}$ leider kein schöner Wert: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

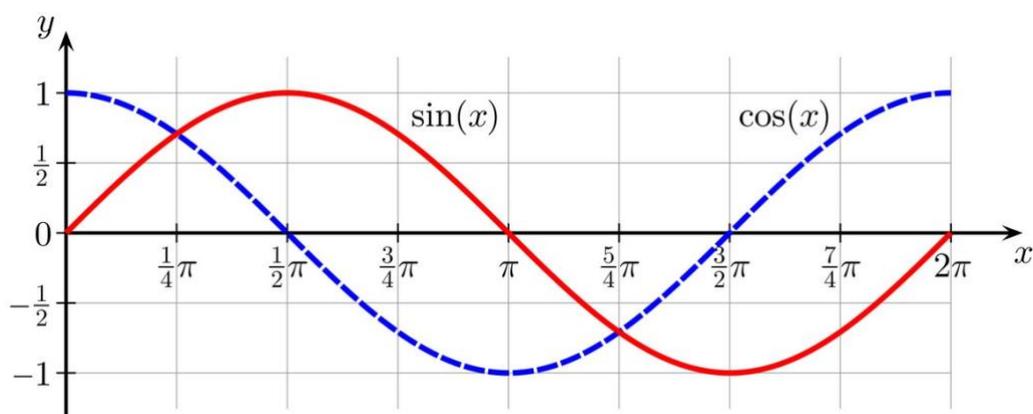
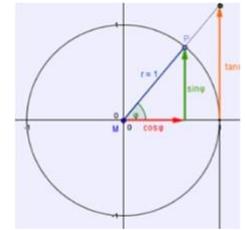


Abbildung 12 Verhalten von Sinus und Cosinus¹²

8.9.2.2. Sinus

Definiert als:

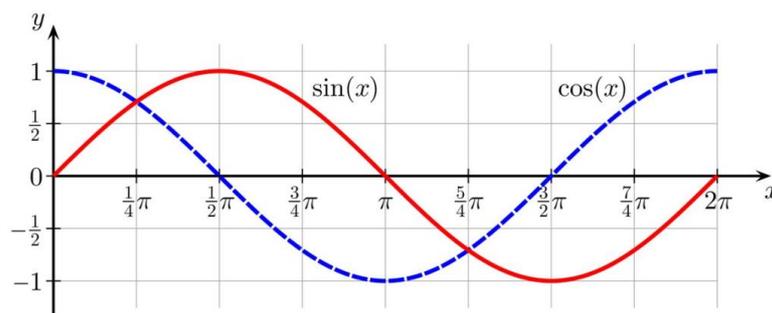
$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



Sein Verhalten in Tabellenform:

Winkel	360° bzw. 2π.	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$	180° bzw. π	270° bzw. $\frac{3}{2}\pi$
Wert	0	1	0	-1

Es gibt auch hier natürlich wieder denn Fall des Winkels von 45° bzw. $\frac{\pi}{4}$, mit einem Wert von: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

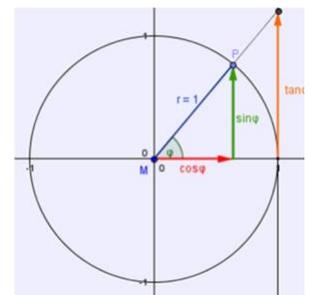


Diese Grafik ist von hoher Wichtigkeit und gerne gefragt!

8.9.2.3. Tangens¹³

Diese Winkelfunktion ist aus meiner Sicht die Schwierigste. Der Tangens leitet sich aus den anderen beiden Winkelfunktionen ab

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\frac{G}{H}}{\frac{A}{H}} = \frac{G \cdot H}{A \cdot H} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



Sich die Werte beim Tangens vorzustellen ist etwas mühsamer. Am besten man merkt sich dazu (siehe obige Abbildung), dass der Tangens als „Verlängerung des Winkels **außerhalb** des Kreises“ dargestellt werden kann. Er ist dem Sinus sehr ähnlich, dieser befindet sich jedoch **innerhalb** des Kreises und maximiert sich daher bei 90° zum Kreisradius von 1. Der Tangens hingegen, welcher nicht an den Kreis gebunden ist, maximiert sich ins Unendliche und wird daher als undefiniert gehalten. Am Punkt von 270° passiert ähnliches, der Sinus wird zu -1 und der Tangens geht negativ ins Unendliche.

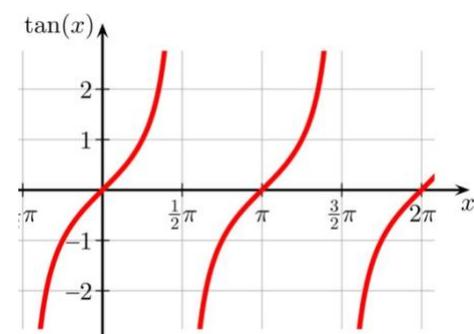


Abbildung 13 Verhalten vom Tangens

Bei 0° und 180° passiert exakt dasselbe mit Sinus und Tangens.

Winkel	360° bzw. 2π.	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$	180° bzw. π	270° bzw. $\frac{3}{2}\pi$
Wert	0	Undef.	0	Undef.

Am Winkel von 45° bzw. $\frac{\pi}{4}$ ist der Tangens genau 1. (In den Zeichnungen des Einheitskreises kann daher der Winkel nicht 45° sein, auch wenn es verlockend danach aussieht.)

9. Geometrie

Ein Kapitel, in welchem doch manchmal Fragen kommen, speziell in ähnlicher Form wie:
„Wenn man den Radius einer Kugel verdoppelt, wie verhält sich das Volumen?“

Es gilt: möglichst wenig auswendig lernen und viel **verstehen**, bei jeder Formel 2x drüber nachdenken wie man darauf kommt, das spart anstrengendes Auswendiglernen! (Das müsst ihr woanders noch genug!)

9.1. Vierecke

Allgemein gilt, dass für den Umfang alle Seiten zusammenaddiert werden und die Winkelsumme 360° sein muss!

9.1.1. Rechteck¹⁴

$$\text{Winkelsumme: } 360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\text{Umfang: } U = 2 * a + 2 * b$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = a * b$$

$$\text{Diagonale: } d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

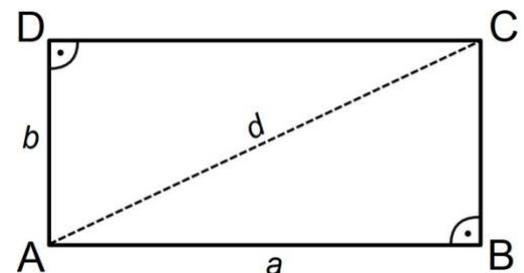


Abbildung 14 Rechteck

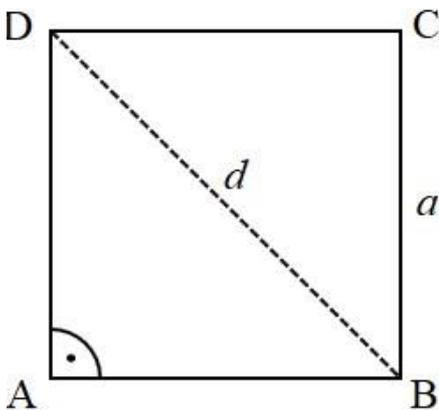


Abbildung 15 Quadrat

9.1.2. Quadrat¹⁵

Ist eine Sonderform des Rechtecks, bei welcher alle Seiten gleich lang sind. Dementsprechend ändern sich auch die Formeln etwas.

$$\text{Winkelsumme: } 360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\text{Umfang: } U = 4 * a$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = a * a = a^2$$

$$\text{Diagonale: } d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a * \sqrt{2}$$

9.1.3. Parallelogramm¹⁶

Ist ein Viereck, bei welchen die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind. Dadurch gilt:

$$a = c \quad \& \quad b = d$$

Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß:

$$\alpha = \gamma \quad \& \quad \beta = \delta$$

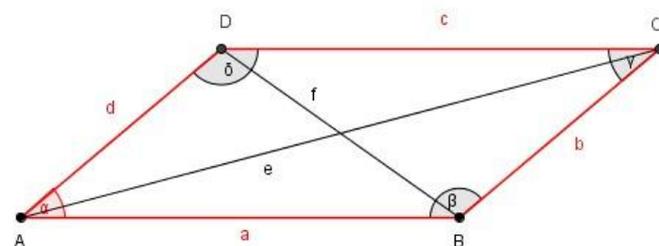


Abbildung 16 Parallelogramm

So wie die benachbarten Winkel, sie sind supplementär und bilden 180° , z.B. $\alpha + \delta = 180^\circ$

$$\text{Winkelsumme: } 360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\text{Umfang: } U = 2 * a + 2 * b$$

Flächeninhalt: $A = a * h_a = b * h_b$ wobei $h_a = \sin(\alpha) * d$ und $h_b = \sin(\gamma) * c$

h_a ist die Höhe weggehend von a zu c , analog dazu ist h_b von b zu d . „Verschobenes Rechteck“

9.1.4. Raute¹⁷

So wie das Parallelogramm ein verschobenes Rechteck war, ist die Raute ein verschobenes Quadrat. Wieder gilt, dass die benachbarten Winkel 180° bilden.

$$\text{Winkelsumme: } 360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\text{Umfang: } U = 4 * a \text{ (in der Grafik sind die Seiten gleich lang)}$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = a * h = \frac{e * f}{2}$$

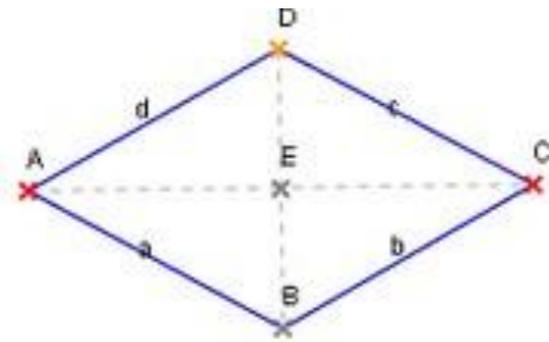


Abbildung 17

Flächeninhalt und Diagonallänge gestalten sich bei Raute und Parallelogramm etwas mühsam. Da sie bis jetzt noch nicht Thema waren beim MedAT, werden wir sie hier getrost weglassen.

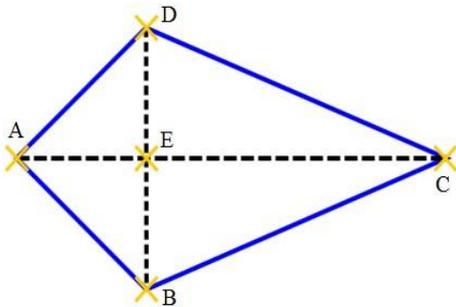


Abbildung 18 Drachenviereck

9.1.5. Deltoid¹⁸

In einem Deltoid gilt, dass Nachbarseiten gleich lang sind, ebenso sind die sich gegenüberliegenden Winkel gleich groß.

$$\text{Winkelsumme: } 360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\text{Umfang: } U = 2a + 2b$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = \frac{e * f}{2}$$

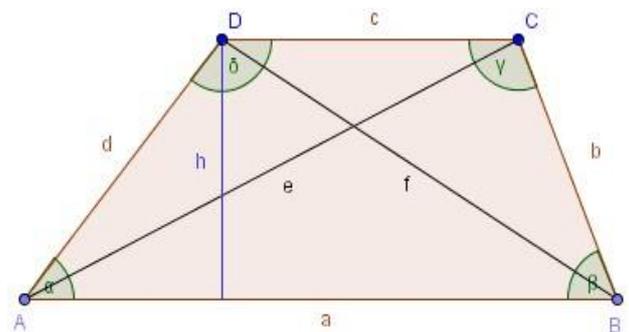
9.1.6. Trapez¹⁹

Ist ein Viereck, bei welchem zwei Seiten zueinander parallel liegen. Die beiden an die „nicht-parallelen-Seiten“ anliegenden Winkel bilden gemeinsam 180° .

$$\text{Winkelsumme: } 360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

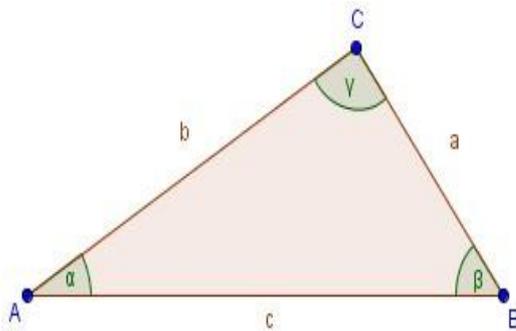
$$\text{Umfang: } U = a + b + c + d$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = \frac{(a + c) * h}{2} \text{ mit } h = \sin(\alpha) * d$$



9.2. Dreieck

Hat drei Punkte, drei Seiten und die Winkelsumme addiert sich immer zu 180° auf.



9.2.1. Ungleichseitige Dreiecke²⁰

Das am häufigsten vorkommende Dreieck ohne Besonderheiten. Alle Seiten sind unterschiedlich lang, alle Winkel unterschiedlich groß.

$$\text{Winkelsumme: } 180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\text{Umfang: } U = a + b + c$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ mit } h_c = \sin(\alpha) \cdot b$$

9.2.2. Rechtwinkeliges Dreieck²¹

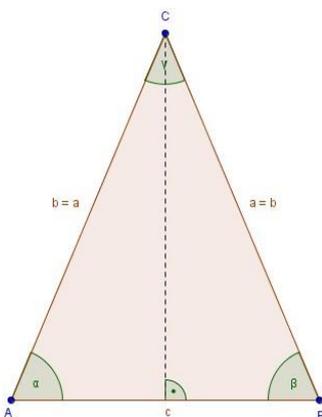
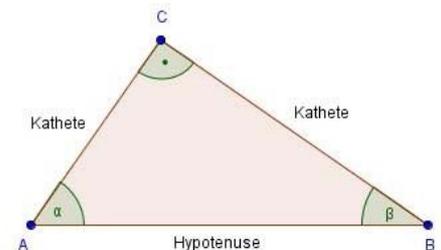
Im rechtwinkligen Dreieck gelten besondere Regeln. Sinus, Cosinus und Tangens lassen sich direkt auf die Seiten anwenden und der Satz des Pythagoras greift.

$$\text{Winkelsumme: } 180^\circ = \alpha + \beta + 90^\circ$$

$$\text{Umfang: } U = a + b + c$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = \frac{a \cdot b}{2} \text{ weil } h_c = \sin(90) \cdot b = b$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



9.2.3. Gleichschenkelige Dreiecke²²

Beide Schenkel sind gleich lang. Dadurch sind die beiden, der Basis anliegenden Winkel genau gleich groß.

$$\text{Winkelsumme: } 180^\circ = \alpha + \beta + \gamma \quad (\alpha = \beta)$$

$$\text{Umfang: } U = 2 \cdot a + c$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = \frac{c}{2} \cdot h_c \text{ mit } h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

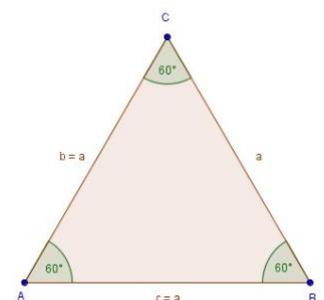
9.2.4. Gleichseitige Dreiecke²³

Alle Seiten sind gleich lang, alle Winkel sind 60° groß.

$$\text{Winkelsumme: } 180^\circ = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ$$

$$\text{Umfang: } U = 3 \cdot a$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

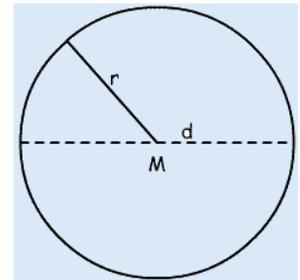


9.3. Kreis^{24,25}

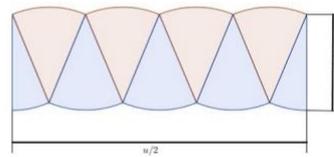
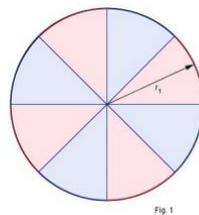
Durchmesser: $d = 2 * r$

Umfang: $2 * r * \pi$

Kreisfläche: $r^2 * \pi$



Die Kreisfläche leitet sich nun so ab, dass Kreissegmente ineinander geschachtelt eine Fläche ergeben, bei welcher der Radius, die Breite und der halbe Umfang die Länge bilden.



9.4. Kugel²⁶

$$\text{Volumen } V = \frac{4}{3} * \pi * r^3$$

$$\text{Oberfläche: } O = 4 * \pi * r^2$$

Kreis, Kugel, Sinus, Cosinus sind gern gefragte Themen beim MedAT.

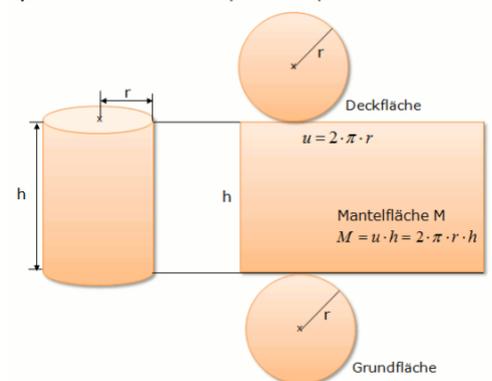
9.5. Zylinder²⁷

Haben einen Kreis als Grundfläche und eine rechteckige Mantelfläche.

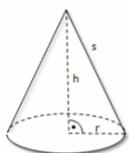
$$V = G * h = \pi * r^2 * h$$

$$O = 2 * G + M = 2 * \pi * r^2 + 2 * \pi * r * h$$

Zylinder berechnen: Mantelfläche, Grundfläche, Deckfläche

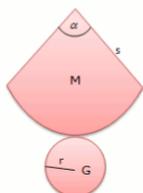


Kegel Volumen, Mantel und Oberfläche



Volumen eines Kegels

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} * G * h = \frac{1}{3} * \pi r^2 * h$$



Mantelfläche und Oberfläche eines Kegels

Mantelfläche M = Kreisabschnitt: $M = \pi * r * s$

Grundfläche G = Kreisfläche: $G = \pi * r^2$

Oberfläche $O_{\text{Kegel}} = G + M = \pi r^2 + \pi * r * s$

9.6. Kegel²⁸

Besitzt wieder eine kreisförmige Grundfläche, jedoch eine Mantelfläche, welche einem Kreisabschnitt entspricht.

$$V = \frac{1}{3} * G * h = \frac{1}{3} * \pi * r^2 * h$$

$$O = G + M = \pi r^2 + \pi * r * s$$

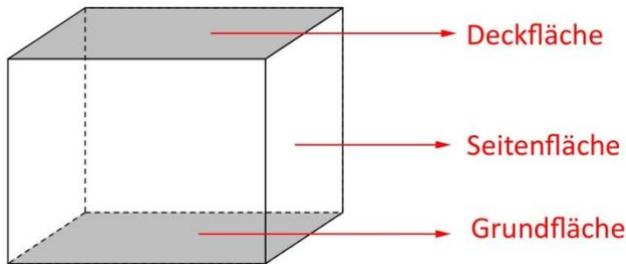
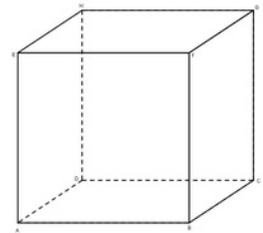
$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

9.7. Würfel²⁹,

Alle Seiten sind gleich lang, die Winkel sind alle 90° .

$$V = a^3$$

$$O = 6 * a^2$$



9.8. Quader³⁰

Die Seiten sind unterschiedlich lang.

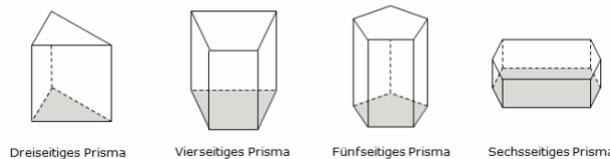
$$V = a * b * h$$

$$O = 2[(a * b) + (b * h) + (a * h)]$$

9.9. Prisma³¹

Bei Prismen handelt es sich um Figuren mit verschiedenen Grundflächen.

Prismen mit verschiedenen Eckenzahlen



Generell gilt für Prismen:

$$\text{Oberfläche } O = 2 * G + M$$

$$\text{Volumen } V = G * h$$

Die Grundfläche ist individuell verschieden, genauso wie die Mantelfläche. Die Mantelfläche erhält man, wenn man die Fläche aller Seiten (exklusive Grund- und Deckfläche) zusammenzählt.

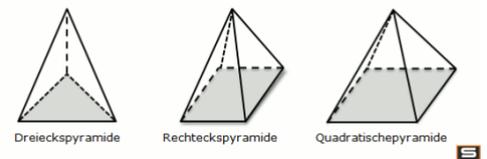
9.10. Pyramide^{32,33}

Ist ein von einer Grundfläche weg, spitz zulaufender Körper. Seine Form ist, ähnlich wie beim Prisma, abhängig von der Grundfläche.

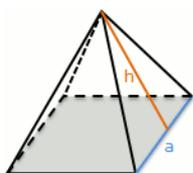
$$V = \frac{1}{3} * G * h$$

$$O = G + M$$

Pyramiden mit verschiedenen Grundflächen



Eine Seite bei den Pyramiden errechnet sich oft mit der Flächenformel für gleichschenkelige Dreiecke.



$$A = \frac{a}{2} * h_a$$



10 Vektorrechnung

Welche Größen vektoriell und welche skalar sind wurde bereits geklärt. Jetzt wollen wir uns genauer anschauen, was ein Vektor ist. Und wie man mit Vektoren rechnet. Hierbei wird speziell der Fokus auf 2D Vektoren gelegt aber man kann die Prinzipien auch auf 3D-Vektoren übertragen.

Ein Vektor hat immer eine Größe und auch eine Richtung. Im 3D Koordinatensystem kann man das in die X,Y und Z Anteile unterteilen.

$$\text{Von } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ oben nach unten X,Y und Z Anteile}$$

Nun kann man mit Vektoren auch rechnen: die wichtigsten Rechengänge, die man hierbei anwendet, sind das Addieren, das Subtrahieren und zwei verschiedene Arten des Multiplizierens (mehr dazu später).

10.1. Betrag

Den Betrag eines einzelnen Vektors kann man auch in 3D berechnen, aber für den MedAT sollte die Berechnung in 2D ausreichen. Hierbei kommt der Satz des Pythagoras zum Einsatz.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hierbei ist unser Betrag c. Somit müssen wir nur die Wurzel aus der Summe der Quadrate ziehen.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

C ist dann der Betrag unseres Vektors und stellt den Abstand vom Beginn zum Ende dar.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi,$$

10.2. Winkel

Den Winkel zwischen zwei Vektoren kann man mit der oben gezeigten Formel berechnen, aber höchstwahrscheinlich wird solch ein Beispiel nicht zum MedAT kommen. Zumal man für eine Berechnung komplizierterer Vektoren einen Taschenrechner brauchen würde.

10.3. Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor besitzt die gleiche Richtung (Orientierung), wie der Vektor, von dem er erstellt wird. Er hat die Länge einer einzelnen Längeneinheit (Je nach Skalierung des Graphen z.B. 1cm)

Dafür braucht man nur mit dem Tangens den Winkel zu berechnen, der mit der X-Achse aufgespannt wird und berechnet sich dann mit Cosinus und Sinus den X bzw. den Y Anteil des Vektors (Hypothense=1).

10.4. Normalvektor

Ein Normalvektor ist einfach ein Vektor der normal auf den anderen steht. Hierbei vertauscht man einfach nur X und Y Anteile des Vektors und setzt vor einen der Anteile ein Minus. Hierbei ist egal, ob man den X oder den Y Anteil negativ macht (Im 2D Raum kann man zwei rechtwinklige Vektoren zu einem Ursprungsvektor erzeugen)

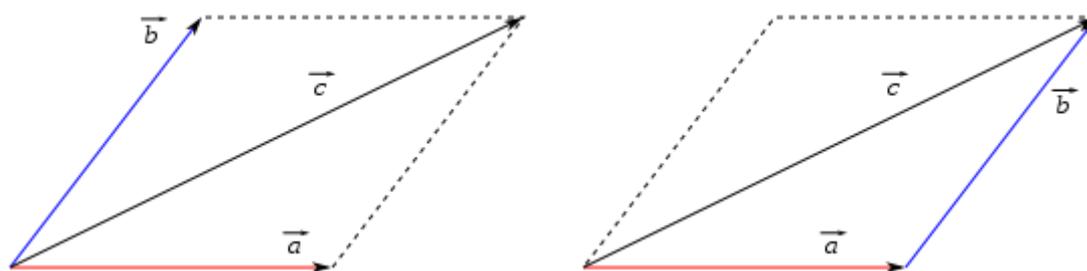
$\vec{v} = (a, b)$ ist unser Ursprungsvektor. Somit sind $(-b, a)$ und $(b, -a)$ rechtwinkelig darauf.

10.5. Vektoraddition

Beim Addieren von Vektoren addiert man die einzelnen Anteile der Vektoren miteinander.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Grafisch kann man sich eine Addition von Vektoren auch so vorstellen, dass der Beginn eines Vektors (a) an das Ende des anderen Vektors gestellt wird (b) und der resultierende Vektor (c) verbindet den resultierenden Endpunkt mit dem Anfangspunkt des ersten Vektors (a).

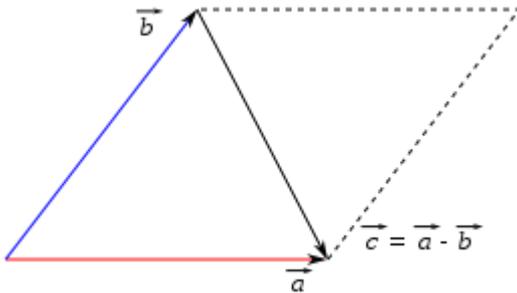


10.6. Vektorsubtraktion

Beim Subtrahieren von Vektoren geht man rechnerisch gleich vor wie beim Addieren: Man subtrahiert die Einzelteile des 1. Vektors jeweils mit den Anteilen des 2. Vektors.

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

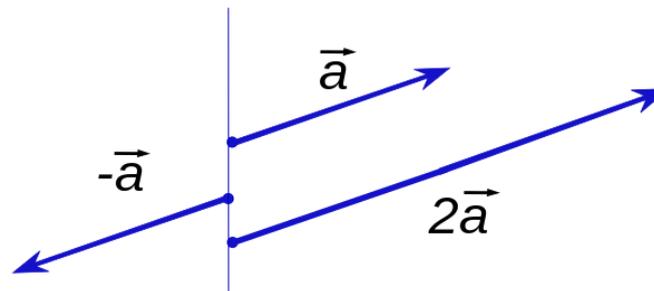
Grafisch kann man sich die Subtraktion so darstellen, dass man den 2. Vektor (b) an den Beginn des 1. Vektors (a) legt und der Endpunkt des 2. Vektors zum Endpunkt des zweiten Vektors gezogen wird. Achtung: hierbei ist es im Gegensatz zum Addieren wichtig, welcher Vektor von welchem abgezogen wird! (Beim Addieren kann man die beiden Vektoren vertauschen)



10.7. Vektormultiplikation

Multiplizieren eines Vektors mit einem Skalar

Man kann einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren, um ihn zu verlängern oder in die Gegenrichtung zu drehen. Hierbei wird der Skalar einfach mit jedem der einzelnen Anteile des Vektors multipliziert.

$$\vec{r}\vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$$


Multiplizieren von 2 Vektoren = Skalarprodukt

Multipliziert man 2 Vektoren miteinander erhält man das Skalarprodukt. Dieses wird zwar höchstwahrscheinlich nicht beim MedAT überprüft, aber es könnte dennoch interessant sein, dass wenn 2 Vektoren normal aufeinander stehen (im rechten Winkel aufeinander), dass das Skalarprodukt 0 ergibt.

Beim Berechnen des Skalarprodukts multipliziert man jeweils die zusammengehörenden Anteile des Vektors und addiert sie dann miteinander.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

11 Quellen- und Bildverzeichnis:

- ¹ http://www.mathematik-wissen.de/rechenregeln_und_rechengesetze.htm Aufrufdatum: 09.07.2015 20:41
- ² <http://www.free-education-resources.com/www.mathematik.net//o-tabellen/zahlenbereiche.htm>
Aufrufdatum: 09.07.2015 21:04
- ³ http://www.madipedia.org/images/5/5f/%C3%9Cberischt_Zahlbereiche_1.jpg Aufrufdatum: 09.07.2015 21:07
- ⁴ <http://www.online-wissen.org/mathematik/zehnerpotenzen-und-ihre-praefixe> Aufrufdatum: 09.07.2015 21:19
- ⁵ <http://www.geodz.com/deu/d/SI-Einheiten> 09.07.2015 21:21
- ⁶ http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/flaechenmasse.jpg Aufrufdatum: 09.07.2015 23:19
- ⁷ http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/litermasse_1.jpg Aufrufdatum: 09.07.2015 23:21
- ⁸ http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i_ableitungen.html Aufrufdatum: 02.08.2015 14:00
- ⁹ http://www.dieter-heidorn.de/Mathematik/RP_Analysis1/K8_Anwendungen/Anwendungen_html_fo25c8f.gif Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹⁰ http://www.mathe-online.at/materialien/heike.farkas/files/Vektorrechnung_Ebene/winkel1.jpg
Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹¹ http://www.mathe-online.at/materialien/julian.langmann/files/Winkelfunktionen_am_EHK/ehk5.png
Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹² <http://www.mathe-online.at/lernpfade/einheitskreis/?kapitel=2> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹³ <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/74/Tangent-plot.svg/2000px-Tangent-plot.svg.png> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹⁴ <https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS5wgzVAmnxIKMyMTc6KsLH4cC2OyCTVRFsloHkKhlvHiYGUy-bsQ2oEkIN> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹⁵ <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/23/SquareDefinition.svg/220px-SquareDefinition.svg.png> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹⁶ http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/parallelogramm_skizze1.jpg Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹⁷ <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/49/Raute.png> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹⁸ <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/cb/Drachenviereck.svg/440px-Drachenviereck.svg.png> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ¹⁹ http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/trapez_01.jpg Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²⁰ https://encrypted-tbn1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTDhaVeHEL_zsBJZgnarLuolkSVzjDUCRcpmW6doJXWodFM4mePwDTwIHs Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²¹ http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/rechtwinklig.jpg Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²² http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/gleichschenkelig.jpg Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²³ http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/gleichseitig.jpg Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²⁴ <http://www.matheboard.de/mathe-formeln-pics/kreis.gif> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²⁵ http://www.mathe-online.at/materialien/alina.jannach/files/Lernpfad/Flaechenformel_herleitung.jpg
Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²⁶ <https://www.roedentaler.de/images/content/product/full/bauble-14.jpg> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²⁷ <http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/zyylinder-berechnen-geometrie-flaeche-formel.png>
Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²⁸ <http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/kegel-berechnen-kegel-volumen-kegel-formel.png>
Aufrufdatum: 02.08.2015
- ²⁹ http://media.4teachers.de/images/thumbs/image_thumb.1606.png Aufrufdatum: 02.08.2015
- ³⁰ http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/wuerfel1.jpg Aufrufdatum: 02.08.2015
- ³¹ <http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/prisma-grundflaeche-koerper.png> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ³² <http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/pyramide-grundflaeche-dreieckspyramide-rechteckspyramide-quadratische-pyramide.png> Aufrufdatum: 02.08.2015
- ³³ <http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/pyramide-aufgabe-uebung-oberflaeche-mantel.png>
Aufrufdatum: 02.08.2015